

И. Я. ШТАЕРМАН
Член-корреспондент АН УССР

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Редактор **И. К. Снитко.**

Техн. редактор **Н. Я. Мурашова.**

Подписано к печати 10/III—1949 г. 17 печ. л. 18,8 уч.-изд. л. 44 017 тип. зн.
в печ. листе А-01604. Тираж 4000 экз. Цена книги 11 р. 25 к. Переплёт 2 р.
Заказ № 868.

16-я типография треста «Полиграффиниш» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава I. Математическое введение	7
§ 1. Приведение основного уравнения плоской контактной задачи к задаче Дирихле для круга	7
§ 2. Некоторые методы решения задачи Дирихле для круга	18
§ 3. Решение основного уравнения плоской контактной задачи посредством функций комплексного переменного	28
§ 4. Случай нескольких участков интегрирования в основном уравнении контактной задачи	44
§ 5. Уравнение периодической контактной задачи	56
§ 6. Уравнение контактной задачи при наличии трения между сжимаемыми телами	76
§ 7. Уравнение задачи о сжатии упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями	81
Глава II. Плоская контактная задача	93
§ 1. Вывод основного уравнения плоской контактной задачи	93
§ 2. Случай одного участка сжатия упругих тел	96
§ 3. Задача о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость	114
§ 4. Случай нескольких участков сжатия	121
§ 5. Периодическая контактная задача	127
§ 6. Контактная задача при наличии сил трения	138
§ 7. Сжатие упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, радиусы которых почти равны	142
§ 8. Решение задачи о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость на основе новой гипотезы	157
Глава III. Осесимметричная контактная задача	163
§ 1. Математическое введение в осесимметричную контактную задачу теории упругости	163
§ 2. Сжатие упругих тел, ограниченных поверхностями вращения	175
§ 3. Давление круглого цилиндрического штампа на упругое полупространство	191
Глава IV. Общий случай контактной задачи	197
§ 1. Потенциал эллиптического диска	197
§ 2. Давление эллиптического штампа на упругое полупространство	205
§ 3. Сжатие двух упругих тел, первоначально касающихся в точке	210
Приложение 1. Приведение некоторых эллиптических интегралов к каноническому виду	229
Приложение 2. О приближённом решении некоторых интегральных уравнений контактной задачи	251

ПРЕДИСЛОВИЕ

Контактная задача является одной из основных задач в теории упругости. Расчёт многих ответственных деталей, сооружений и машин основывается на теории сжатия упругих тел. Однако эта теория представляет значительные математические трудности. Первое правильное решение основного случая контактной задачи дал Герц¹⁾ ещё в 1882 году, и на этом решении математическое развитие проблемы застыло примерно на 60 лет. В течение этого периода усилия инженеров и теоретиков были направлены главным образом на экспериментальную проверку теории и на развитие её применений в инженерном деле (работы академика А. Н. Динника, Н. М. Беляева и др.).

В 20-х и особенно в 30-х и 40-х годах нашего столетия математическая база для решения контактной задачи стала совсем не такой, какой она была во второй половине прошлого столетия. Герц использовал в своём исследовании только формулы из теории потенциала однородного эллипсоида, что представляет простейший прототип решений задач теории потенциала и теории интегральных уравнений, в то время как мы, начиная примерно с 30-х годов, располагаем мощным, развитым у нас в Союзе аппаратом решения задач теории упругости, созданным главным образом академиком Н. И. Мусхелишвили. Мы имеем в виду его метод решения задач теории упругости посредством функций комплексного переменного и другой его метод, основанный на применении сингулярных интегральных уравнений и разработанный им, а отчасти его школой: И. Н. Векуа и др. Первый метод изложен в его монографии «Некоторые основные задачи математической теории упругости», другой — в его монографии «Сингулярные интегральные уравнения» и в статьях, ей предшествовавших. В этих книгах можно найти обширные библиографические данные. Отметим, что в науке, до некоторой степени родственной теории упругости, а именно, в гидро- и аэродинамике уже давно при решении задач о плоском движении жидкости и о подъёмной силе крыла применя-

¹⁾ Hertz H., Gesammelte Werke, т. 1. Leipzig, 1895, стр. 155.

лись функции комплексного переменного и сингулярные интегральные уравнения.

Вполне естественно, что у нас в Союзе возник ряд работ, в которых контактная задача теории упругости получила существенное усовершенствование и развитие.

Впервые решения новых контактных задач, являющихся обобщением основного случая, были даны мною¹⁾. В последующих статьях²⁾ я получил решения ряда других задач, используя отчасти математический аппарат, созданный академиком А. М. Ляпуновым³⁾.

Очень ценные решения были получены рядом авторов, особенно в школе Н. И. Мусхелишвили⁴⁾, а также Л. А. Галиным⁵⁾, А. И. Лурье⁶⁾, Г. Н. Савиным⁷⁾ и др. Таким образом, в настоящее время теория контактной задачи достигла такого большого развития, что она может рассматриваться, как крупный самостоятельный отдел теории упругости, имеющий важное практическое значение для расчёта частей сооружений и машин.

Одной из необходимых предпосылок для этого является доведение математической теории контактной задачи до инженер-теоретиков.

Изложение нашей книги мы построили так, чтобы она за небольшими исключениями была доступна инженеру, знакомому с курсом высшей математики втуза и имеющему некоторый опыт в чтении математической литературы.

Вся первая глава нашей книги посвящена методам решения основных уравнений контактной задачи. Мы стремились сочетать простоту изложения с надлежащей полнотой математического охвата.

¹⁾ Штаерман И. Я., К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. Доклады АН СССР, т. XXV, № 5, 1939.

²⁾ Штаерман И. Я., Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел (Доклады АН СССР, т. XXIX, № 3, 1940). Местные деформации при сжатии упругих круговых цилиндров, радиусы которых почти равны (Доклады АН СССР, т. XXIX, № 3, 1940). К вопросу о местных деформациях при сжатии упругих тел (Доклады АН СССР, т. XXXI, № 8, 1941). Некоторые особые случаи контактной задачи (Доклады АН СССР, т. XXXVIII, № 7, 1943). Об одном обобщении задачи Герца (Журнал «Прикладная математика и механика», т. V, вып. 3, 1941).

³⁾ Liapounoff A., Sur les figures d'équilibre, III часть, St.-Petersbourg, 1912.

⁴⁾ См. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.

⁵⁾ Галин Л. А., Исследование смешанных задач теории упругости (Докторская диссертация, Институт механики АН), Москва, 1946.

⁶⁾ Лурье А. И., Некоторые контактные задачи теории упругости. Журнал «Прикладная математика и механика», т. V, вып. 3, 1941.

⁷⁾ ДАН УРСР № 6, 1939; № 7, 1940; Сообщения Грузинского филиала АН СССР, т. I, № 10, 1940 г.

Вторая часть содержит наряду с классическими исследованиями изложение некоторых работ отечественных математиков по плоской контактной задаче теории упругости, в том числе и мои работы, часть которых публикуется впервые; к ним относятся: новая постановка задачи о давлении штампа на упругую полуплоскость, изложенная в § 3 главы II, периодическая контактная задача, которая составляет содержание § 5 главы II.

В § 8 главы II сделана попытка учёта поверхностных деформаций, до сих пор не принимавшихся в расчёт в теории контактной задачи.

В главе III дан ряд новых решений осесимметричной контактной задачи теории упругости.

В главе IV наряду с классическими решениями приведён ряд новых решений, принадлежащих автору.

Книгу следует рассматривать как раздел математической теории упругости, так как она посвящена решению основных контактных задач теории упругости.

Основные сведения по теории контактной задачи можно найти в курсах академика Л. С. Лейбензона¹⁾ и С. П. Тимошенко²⁾.

¹⁾ Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

²⁾ Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, 1937.

ГЛАВА I
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ¹⁾

§ 1. Приведение основного уравнения плоской контактной задачи к задаче Дирихле для круга

Начнём с рассмотрения основного уравнения плоской контактной задачи теории упругости:

$$\int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt = f(x), \quad -a < x < a, \quad (1)$$

где $f(x)$ — функция, заданная внутри интервала $(-a, a)$, $p(t)$ — неизвестная функция, которую требуется определить внутри интервала $(-a, a)$ так, чтобы удовлетворилось уравнение (1). Относительно заданной функции $f(x)$ будем предполагать, что она непрерывна, производная же её $f'(x)$ может иметь точки разрыва внутри интервала $(-a, a)$.

Рассмотрим функцию двух переменных

$$V(x, y) = \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{R} dt, \quad (2)$$

где

$$R = \sqrt{(x-t)^2 + y^2}. \quad (3)$$

При $y=0$ R обращается в $|x-t|$ и функция $V(x, y)$ обращается в левую часть уравнения (1). Таким образом, уравнение (1) эквивалентно условию

$$V(x, 0) = f(x), \quad -a < x < a, \quad (4)$$

налагаемому на функцию $V(x, y)$. Функцию $V(x, y)$, определённую соотношением (2), называют логарифмическим потенциалом простого слоя на отрезке оси Ox $-a < x < a$ с плотностью $p(t)$.

¹⁾ В этой главе мы приводим детально и по возможности элементарно излагаемые решения некоторых уравнений, на которых основывается теория контактных задач, помещённых в главе II.

Решение исходного уравнения (1) эквивалентно отысканию плотности простого слоя, логарифмический потенциал которого $V(x, y)$ обращается в заданную функцию $f(x)$ на отрезке оси Ox $-a < x < a$. Прежде чем перейти к решению этой задачи, исследуем подробнее свойства потенциала простого слоя $V(x, y)$. Если точка с координатами x, y не лежит на отрезке оси Ox $-a < x < a$, частные производные от функции $V(x, y)$ могут быть вычислены непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в правой части соотношения (2).

Последовательно находим:

$$\ln \frac{1}{R} = -\frac{1}{2} \ln R^2 = -\frac{1}{2} \ln [(x-t)^2 + y^2],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R} = -\frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R} = -\frac{y}{(x-t)^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{R} = \frac{(x-t)^2 - y^2}{[(x-t)^2 + y^2]^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \frac{1}{R} = \frac{-(x-t)^2 + y^2}{[(x-t)^2 + y^2]^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\int_{-a}^a \frac{p(t)(x-t) dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -\int_{-a}^a \frac{p(t)y dt}{(x-t)^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} = \int_{-a}^a \frac{p(t)[(x-t)^2 - y^2] dt}{[(x-t)^2 + y^2]^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = -\int_{-a}^a \frac{p(t)[(x-t)^2 - y^2] dt}{[(x-t)^2 + y^2]^2}.$$

Из соотношений (5) очевидно, что функция $V(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение (6) носит название уравнения Лапласа; всякую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, называют гармонической функцией. Итак, функция $V(x, y)$ везде в плоскости xOy , за исключением точек отрезка оси Ox $-a < x < a$, является функцией гармонической.

Исследуем теперь поведение частной производной $\frac{\partial V}{\partial y}$ при подходе точки с координатами x, y к отрезку оси Ox $-a < x < a$. При $-a < x < a$ определённый интеграл, определяющий произ-

водную $\frac{\partial V}{\partial y}$ в формулах (5), можно разбить на три интеграла:

$$\begin{aligned} - \int_{-a}^a \frac{p(t)y dt}{(x-t)^2 + y^2} &= \\ &= -y \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2} - y \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2} - y \int_{x+\varepsilon}^a \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Второй из определённых интегралов правой части формулы (7) в свою очередь можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$-y \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2} = -yp(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} + y \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{[p(x) - p(t)] dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad (8)$$

если функция $p(t)$ непрерывна в точке $t=x$.

Итак,

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y) + J_4(x,y), \quad (9)$$

где

$$J_1(x,y) = -y \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad J_2(x,y) = -y \int_{x+\varepsilon}^a \frac{p(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad (10)$$

$$J_3(x,y) = -yp(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad (11)$$

$$J_4(x,y) = y \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{[p(x) - p(t)] dt}{(x-t)^2 + y^2}. \quad (12)$$

Полагая в (10) $y=0$, найдём:

$$J_1(x,0) = J_2(x,0) = 0, \quad (13)$$

так как в определённых интегралах

$$\int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{p(t) dt}{(x-t)^2} \quad \text{и} \quad \int_{x+\varepsilon}^a \frac{p(t) dt}{(x-t)^2} \quad (14)$$

подинтегральные функции ограничены, а следовательно, ограничены и сами определённые интегралы (14). Полагая

$$t = x - |y| \operatorname{tg} \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

найдём:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{|y|} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \frac{2\alpha_0}{|y|}, \quad (15)$$

где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{|y|} \quad \left(0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (11), найдём:

$$J_s(x, y) = -\frac{y}{|y|} 2\alpha_0 p(x),$$

или

$$\left. \begin{aligned} J_s(x, y) &= -2\alpha_0 p(x) && \text{при } y > 0, \\ J_s(x, y) &= 2\alpha_0 p(x) && \text{при } y < 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Как видно из (16),

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } y = 0. \quad (18)$$

Таким образом, если координата y стремится к нулю, оставаясь положительной, функция $J_s(x, y)$ стремится к предельному значению $-\pi r(x)$; если координата y стремится к нулю, оставаясь отрицательной, функция $J_s(x, y)$ стремится к значению $\pi r(x)$. Функция $J_s(x, y)$ претерпевает при $y=0$ разрыв, причём

$$J_s(x, +0) = -\pi r(x), \quad J_s(x, -0) = \pi r(x); \quad (19)$$

здесь через $J_s(x, +0)$ и $J_s(x, -0)$ обозначены предельные значения функции $J_s(x, y)$ по разные стороны от точки разрыва.

Пользуясь соотношениями (13) и (19), из формулы (9) найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(x, +0)}{\partial y} + \pi r(x) &= J_4(x, +0), \\ \frac{\partial V(x, -0)}{\partial y} - \pi r(x) &= J_4(x, -0). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из (12) находим:

$$|J_4(x)| \leq \eta |y| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad (21)$$

где η — максимальное абсолютное значение разности $p(t) - p(x)$ при $x - \varepsilon \leq t \leq x + \varepsilon$. Так как функция $p(t)$ по предположению

непрерывна в точке $t = x$, то η будет сколь угодно малой при достаточно малом ε . Подставляя (15) в (21) и принимая во внимание (16), найдём:

$$|J_4(x, y)| \leq 2\alpha_0 \eta \leq \pi \eta. \quad (22)$$

На основании (22) из (20) следует:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial V(x, +0)}{\partial y} + \pi p(x) \right| &\leq \pi \eta, \\ \left| \frac{\partial V(x, -0)}{\partial y} - \pi p(x) \right| &\leq \pi \eta. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как неравенства (23) справедливы при любом сколь угодно малом ε , а η стремится к нулю вместе с ε , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(x, +0)}{\partial y} &= -\pi p(x), \\ \frac{\partial V(x, -0)}{\partial y} &= \pi p(x), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

если в точке $t = x$ функция $p(x)$ не претерпевает разрыва.

Исследуем теперь поведение функции $V(x, y)$ при удалении на бесконечность точки с координатами x, y . Полагая в (3)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

найдем:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 - 2rt \cos \varphi + t^2} = r \sqrt{1 - 2 \frac{t}{r} \cos \varphi + \frac{t^2}{r^2}}, \\ \ln \frac{1}{R} &= \ln \frac{1}{r} - \ln \sqrt{1 - 2 \frac{t}{r} \cos \varphi + \frac{t^2}{r^2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (2), найдём:

$$\begin{aligned} V(x, y) - \ln \frac{1}{r} \int_{-a}^a p(t) dt &= \\ &= - \int_{-a}^a p(t) \ln \sqrt{1 - 2 \frac{t}{r} \cos \varphi + \frac{t^2}{r^2}} dt, \end{aligned} \quad (26)$$

причём правая часть равенства (26) стремится к нулю, когда $r \rightarrow \infty$. Вводя обозначение

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P, \quad (27)$$

найдем:

$$V(x, y) - P \ln \frac{1}{r} \rightarrow 0, \quad \text{когда } r \rightarrow \infty \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (28)$$

Итак, решение исходного уравнения (1) сведено нами к построению функции $V(x, y)$, гармонической во всей плоскости x, y , кроме точек отрезка оси $Ox - a < x < a$, и удовлетворяющей условиям (4) и (28)¹⁾. Построив функцию $V(x, y)$, мы найдём искомую функцию $p(x)$ по одной из формул (24).

Прежде чем перейти к построению функции $V(x, y)$, покажем одно важное свойство, которым обладает уравнение Лапласа (6). Произведём в этом уравнении замену переменных x, y переменными ξ, η , положив:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Последовательно находим:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}, \quad (33)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Свяжем теперь функцию $y(\xi, \eta)$ с функцией $x(\xi, \eta)$ соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

¹⁾ Задача построения гармонической функции по заданным её крайевым значениям носит в теории потенциала название задачи Дирихле. Существование и единственность решения этой задачи доказаны при весьма общих предположениях. В нашей книге на этих исследованиях мы не останавливаемся.

Необходимым и достаточным условием существования функции $y(\xi, \eta)$, удовлетворяющей соотношениям (35), является условие

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right),$$

т. е. условие

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0. \quad (36)$$

Если условие (36) выполняется, то функция $y(\xi, \eta)$ может быть найдена по функции $x(\xi, \eta)$ из соотношений (35) посредством квадратур. При этом функция $y(\xi, \eta)$ определится с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Из соотношений (35) вытекает, что найденная таким образом функция $y(\xi, \eta)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0. \quad (37)$$

Итак, если две функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям (35), то они должны быть функциями гармоническими, как видно из (36) и (37). Если задана гармоническая функция $x(\xi, \eta)$, то гармоническая функция $y(\xi, \eta)$, связанная с ней условиями (35), может быть найдена посредством квадратур с точностью до произвольного постоянного слагаемого. При условиях (35) гармоническую функцию $y(\xi, \eta)$ называют функцией, сопряжённой с гармонической функцией $x(\xi, \eta)$.

Подставляя (35) в (34) и принимая во внимание (36) и (37), найдём, что при условиях (35) будет иметь место соотношение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right]. \quad (38)$$

Это соотношение показывает, что если функция $V(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (6), то после замены переменных (29) эта функция будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0, \quad (39)$$

т. е. уравнение Лапласа сохраняет свой вид при замене переменных (6), если выполняются условия (35). Иными словами, если в выражении для гармонической функции $V(x, y)$ произвести замену переменных x, y переменными ξ, η , то мы получим опять гармоническую функцию новых переменных ξ, η при условиях (35). Это свойство гармонических функций широко используется при решении краевых задач. Действительно, если требуется построить функцию $V(x, y)$, гармоническую в некоторой области g и удовлетворяющую заданным краевым условиям

на границе этой области, то, произведя замену переменных x, y переменными ξ, η , мы придём к задаче построения гармонической функции новых переменных ξ, η по краевым условиям, заданным уже на границе новой области g^* , в которую переходит область g в результате преобразования переменных. В частности, если найти функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$, удовлетворяющие условиям (35) и переводящие область g в плоскости xOy в круг $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ в плоскости $\xi O\eta$, то можно свести построение гармонической функции по краевым условиям, заданным на границе области g , к построению гармонической функции по граничным условиям, заданным на окружности.

Рассматривая решение исходного уравнения (1), мы пришли к построению функции $V(x, y)$, гармонической во всей плоскости xOy , за исключением отрезка оси Ox — $a < x < a$, по граничному условию (4) и дополнительному условию (28). Покажем, что преобразование переменных x, y в переменные ξ, η :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a\xi}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \right), \\ y &= \frac{a\eta}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

удовлетворяет условиям (35) и переводит всю плоскость xOy , за исключением отрезка оси Ox — $a < x < a$, в круг $\xi^2 + \eta^2 < 1$ на плоскости $\xi O\eta$ (решая (40) относительно ξ и η , мы получим два действительных решения; из этих решений мы будем ниже брать то, для которого $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$).

Дифференцируя (40), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{a}{2} \left[1 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \right], & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -\frac{a\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{a\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{a}{2} \left[1 + \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Таким образом, условия (35) удовлетворяются. Полагая в (40)

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta, \quad (42)$$

т. е. переходя к полярным координатам ρ, ϑ на плоскости $\xi O\eta$, найдём:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \vartheta, \\ y &= \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

откуда

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) \right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \right]^2} = 1. \quad (44)$$

Уравнение (44) показывает, что точкам плоскости $\xi O\eta$, лежащим на окружности радиуса ρ :

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \quad (\rho < 1), \quad (45)$$

соответствуют точки плоскости xOy , лежащие на эллипсе (44) с полуосями $\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right)$ и $\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)$. Когда радиус окружности ρ стремится к нулю, полуоси эллипса неограниченно возрастают, точке $\rho = 0$ в плоскости $\xi O\eta$ соответствует бесконечно удалённая точка плоскости xOy . Когда ρ стремится к единице, большая полуось эллипса $\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right)$ стремится к a , малая полуось эллипса $\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)$ стремится к нулю, а окружности $\rho = 1$ на плоскости $\xi O\eta$ соответствует отрезок оси Ox — $a < x < a$. Из (43) видно, что

$$\left. \begin{array}{l} y \leq 0 \text{ при } 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ y \geq 0 \text{ при } \pi \leq \vartheta \leq 2\pi. \end{array} \right\} \quad (46)$$

Таким образом, верхней полуокружности $\rho = 1$ на плоскости $\xi O\eta$ соответствует нижняя сторона отрезка оси Ox — $a < x < a$, нижней полуокружности — верхняя сторона этого отрезка. Полагая $\rho = 1$ в первом из соотношений (43), получим зависимость

$$x = a \cos \vartheta, \quad (47)$$

связывающую положение точки на отрезке оси Ox — $a < x < a$ с положением соответствующей ей точки на окружности $\rho = 1$ в плоскости $\xi O\eta$.

Итак, если в выражении для искомой функции $V(x, y)$, гармонической вне отрезка оси Ox — $a < x < a$, заменить переменные x, y переменными ξ, η согласно (40), то мы получим функцию переменных ξ, η , гармоническую внутри окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$, т. е. удовлетворяющую внутри этой окружности уравнению Лапласа (39) в переменных ξ, η . Граничное условие (4) согласно (47) примет вид:

$$V = f(a \cos \vartheta) \quad \text{при } \rho = 1. \quad (48)$$

Из (39) находим

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{4} \left[\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right] = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\rho^2 + 2 \cos 2\vartheta + \frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{a^2}{4\rho^2} (\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\vartheta + 1), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{2\rho}{a\sqrt{\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\vartheta + 1}}. \quad (49)$$

Логарифмируя (49), найдём:

$$\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{2\rho}{a} = -\ln \sqrt{\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\vartheta + 1}. \quad (50)$$

Отсюда

$$\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{2\rho}{a} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0, r \rightarrow \infty. \quad (51)$$

На основании (51) находим, что условие (28) примет теперь вид:

$$V - P \ln \frac{2\rho}{a} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0. \quad (52)$$

Таким образом, решение исходного уравнения (1) свелось к построению функции V , удовлетворяющей уравнению Лапласа (39) внутри окружности $\rho = 1$ ($\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$) и условиям (48) и (52) на окружности $\rho = 1$ и в начале координат $\rho = 0$. Пользуясь соотношениями (43), найдём:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \cos \vartheta + \frac{\partial V}{\partial y} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \vartheta \right], \end{aligned} \quad (53)$$

откуда

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = a \sin \vartheta \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right), \quad (54)$$

так как $y \rightarrow 0$, когда $\rho \rightarrow 1$. Но, как видно из (46), при $0 < \vartheta < \pi$ $y \rightarrow -0$ (т. е. стремится к нулю, оставаясь отрицательным), когда $\rho \rightarrow 1$, а при $\pi < \vartheta < 2\pi$ $y \rightarrow +0$, когда $\rho \rightarrow 1$. Таким образом, согласно (54)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} &= a \sin \vartheta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=-0} && \text{при } 0 < \vartheta < \pi, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} &= a \sin \vartheta \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=+0} && \text{при } \pi < \vartheta < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Подставляя (24) в (55), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} &= \pi a \sin \vartheta p (a \cos \vartheta) && \text{при } 0 < \vartheta < \pi, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} &= -\pi a \sin \vartheta p (a \cos \vartheta) && \text{при } \pi < \vartheta < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

(аргумент x функции $\rho(x)$ мы заменили на $a \cos \vartheta$ согласно (47)). Соотношениям (56) можно придать вид:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = \pi a |\sin \vartheta| p (a \cos \vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi). \quad (57)$$

Построив искомую функцию V , удовлетворяющую при $\rho = 1$ уравнению Лапласа (39) и удовлетворяющую условиям (48)

и (52) при $\rho = 1$ и при $\rho = 0$, мы найдём искомую функцию p из соотношения (57).

Перейдём в уравнении Лапласа (39) от прямоугольных координат ξ, η к полярным координатам ρ, ϑ , полагая

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta.$$

Находим

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \cos \vartheta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \sin \vartheta,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \cos^2 \vartheta + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \sin^2 \vartheta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \rho \sin \vartheta + \frac{\partial V}{\partial \eta} \rho \cos \vartheta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \rho^2 \sin^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \rho^2 \cos^2 \vartheta - \\ & - \frac{\partial V}{\partial \xi} \rho \cos \vartheta - \frac{\partial V}{\partial \eta} \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}. \quad (58)$$

Итак, если в прямоугольных координатах ξ, η функция V удовлетворяет дифференциальному уравнению (39), то в полярных координатах ρ, ϑ эта функция V удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$W(\rho, \vartheta) = V - P \ln \frac{2\rho}{a}. \quad (60)$$

Подставляя V из (60) в (59), найдём:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad (61)$$

т. е. функция $W(\rho, \vartheta)$, определённая соотношением (60), будет также удовлетворять уравнению Лапласа в полярных координатах. На основании (48) и (52) найдём:

$$W(1, \vartheta) = f(a \cos \vartheta) - P \ln \frac{2}{a}, \quad (62)$$

$$W(0, \vartheta) = 0. \quad (63)$$

Подставляя V из (60) в (57), найдём:

$$\frac{\partial W(1, \vartheta)}{\partial \rho} + P = \pi a |\sin \vartheta| p(a \cos \vartheta),$$

откуда

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{P + \frac{\partial W(1, \vartheta)}{\partial \rho}}{\pi a |\sin \vartheta|}. \quad (64)$$

Итак, отыскав функцию $W(\rho, \vartheta)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (61) при $\rho < 1$ и условиям (62) и (63) при $\rho = 1$ и $\rho = 0$, мы найдём искомую функцию p из соотношения (64). Построению функции, гармонической внутри данной окружности и принимающей на этой окружности заданные значения, и посвящён следующий параграф.

§ 2. Некоторые методы решения задачи Дирихле для круга

Разложим функцию $W(1, \vartheta)$ аргумента ϑ , определённую соотношением (62), в ряд Фурье. Так как функция $W(1, \vartheta)$, согласно (62), чётная, т. е. $W(1, -\vartheta) = W(1, \vartheta)$, этот ряд будет содержать лишь косинусы углов, кратных ϑ , т. е. будет иметь вид:

$$W(1, \vartheta) = f(a \cos \vartheta) - P \ln \frac{2}{a} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n \vartheta. \quad (65)$$

Коэффициенты этого ряда Фурье $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ могут быть, как известно, найдены посредством квадратур по формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(1, \vartheta) d\vartheta,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} W(1, \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

или

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) d\vartheta - P \ln \frac{2}{a},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (66)$$

Покажем теперь, что функцию $W(\rho, \vartheta)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (61) при $\rho < 1$ и условию (65) при $\rho = 1$, можно найти в виде ряда

$$W(\rho, \vartheta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rho^n \cos n\vartheta. \quad (67)$$

Находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \rho} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \rho^{n-1} \cos n\vartheta, & \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n(n-1) \rho^{n-2} \cos n\vartheta, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n^2 \rho^n \cos n\vartheta. \end{aligned} \quad (68)$$

Подставляя (68) в (61), найдём:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [n(n-1) + n - n^2] \rho^{n-2} \cos n\vartheta = 0,$$

т. е. функция $W(\rho, \vartheta)$, определённая рядом (67), действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (61).

Полагая в (67) $\rho = 1$, убедимся в том, что и условие (65) выполняется.

Подставляя (67) в (63), найдём, что должно иметь место равенство

$$\alpha_0 = 0. \quad (69)$$

Условие (69) определяет постоянную P , которая до сих пор оставалась неопределённой. Действительно, подставляя α_0 из (66) в (69), найдём:

$$P = \frac{1}{2\pi \ln \frac{2}{a}} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) d\vartheta. \quad (70)$$

Подставляя (67) в (64), найдём:

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{P + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \cos n\vartheta}{\pi a |\sin \vartheta|}. \quad (71)$$

Вопрос о сходимости формально полученного нами при этом ряда (71) мы пока затрагивать не будем.

Подставляя $P, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ из (70) и (66) в (71) и заменяя в (71) $a \cos \vartheta$ на x , найдём искомое решение $p(x)$ исходного уравнения (1).

Рассмотрим примеры.

$$1) \quad f(x) = \alpha = \text{const.} \quad (72)$$

Как видно из (66), в этом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0.$$

Из (70) находим:

$$P = -\frac{\alpha}{\ln \frac{a}{x}}. \quad (73)$$

Формула (71) даёт:

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{P}{\pi a |\sin \vartheta|}.$$

Полагая $a \cos \vartheta = x$, найдём:

$$\begin{aligned} a |\sin \vartheta| &= \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} = \sqrt{a^2 - x^2}, \\ p(x) &= \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Формулы (74) и (73) дают для данного примера решение исходного уравнения (1).

$$2) \quad f(x) = \alpha - Ax^2. \quad (75)$$

В этом случае

$$f(a \cos \vartheta) = \alpha - Aa^2 \cos^2 \vartheta = \alpha - \frac{1}{2} Aa^2 - \frac{1}{2} Aa^2 \cos 2\vartheta,$$

откуда, на основании (66) и (70),

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} Aa^2, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0,$$

$$P = \frac{\alpha - \frac{1}{2} Aa^2}{\ln \frac{a}{x}}. \quad (76)$$

Из (71) находим:

$$\begin{aligned} p(a \cos \vartheta) &= \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} (P - Aa^2 \cos 2\vartheta) = \\ &= \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} (P \mp Aa^2 - 2Aa^2 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Полагая в этом соотношении $a \cos \vartheta = x$, найдём:

$$p(x) = \frac{P + Aa^2 - 2Ax^2}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (77)$$

Формулы (77) и (76) дают решение исходного уравнения (1) для того случая, когда правая часть этого уравнения $f(x)$ имеет вид (75).

В общем случае установленная нами формула (71) даёт решение исходного уравнения (1) в виде бесконечного ряда.

Покажем теперь другой приём решения задачи, который даёт возможность в общем виде получить решение исходного уравнения (1) в виде определённого интеграла. Докажем, что функция $W(\rho, \vartheta)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (61) при $\rho < 1$ и принимающая при $\rho = 1$ заданные значения

$$W(1, \vartheta) = F(\vartheta), \quad (78)$$

может быть представлена формулой

$$W(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi) (1 - \rho^2) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}. \quad (79)$$

Правая часть формулы (79) носит название интеграла Пуассона. При $\rho < 1$ частные производные от этого интеграла по ρ и по ϑ могут быть найдены непосредственным дифференцированием под знаком интеграла. Находим:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi) [(1 + \rho^2) \cos(\varphi - \vartheta) - 2\rho] d\varphi}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^2},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi) [2 \cos^2(\varphi - \vartheta) - \rho(3 + \rho^2) \cos(\varphi - \vartheta) - 1 + 3\rho^2] d\varphi}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^3},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi) (1 - \rho^2) \rho [2\rho \cos^2(\varphi - \vartheta) + (1 + \rho^2) \cos(\varphi - \vartheta) - 4\rho] d\varphi}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^3}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} &= \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^3} \{ [4\rho - 2\rho(1 + \rho^2) - \\ &\quad - 2\rho(1 - \rho^2)] \cos^2(\varphi - \vartheta) + \\ &\quad + [-2\rho^2(3 + \rho^2) + (1 + \rho^2)^2 + 4\rho^2 - (1 - \rho^2)(1 + \rho^2)] \cos(\varphi - \vartheta) + \\ &\quad + 2\rho(-1 + 3\rho^2) - 2\rho(1 + \rho^2) + 4\rho(1 - \rho^2) \} d\varphi = 0, \end{aligned}$$

т. е. функция $W(\rho, \vartheta)$, определённая соотношением (79), действительно удовлетворяет при $\rho < 1$ дифференциальному уравнению (61). Найдём теперь предел, к которому стремится интеграл Пуассона, когда ρ стремится к своему предельному

значению — единице. Разбив этот интеграл на сумму четырёх интегралов, придадим формуле (79) вид:

$$W(\rho, \vartheta) = J_1(\rho, \vartheta) + J_2(\rho, \vartheta) + J_3(\rho, \vartheta) + J_4(\rho, \vartheta), \quad (79')$$

где

$$J_1(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\vartheta-\alpha} \frac{F(\varphi)(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2}, \quad (80)$$

$$J_2(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta+\alpha}^{2\pi} \frac{F(\varphi)(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2}, \quad (81)$$

$$J_3(\rho, \vartheta) = \frac{F(\vartheta)}{2\pi} \int_{\vartheta-\alpha}^{\vartheta+\alpha} \frac{(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2}, \quad (82)$$

$$J_4(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta-\alpha}^{\vartheta+\alpha} \frac{[F(\varphi)-F(\vartheta)](1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2}. \quad (83)$$

Полагая в (80) и (81) $\rho=1$, найдём:

$$J_1(1, \vartheta) = J_2(1, \vartheta) = 0, \quad (84)$$

так как при $\rho=1$ подинтегральные функции в определённых интегралах $J_1(\rho, \vartheta)$ и $J_2(\rho, \vartheta)$ обращаются в нуль везде в области интегрирования.

Полагая далее

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \operatorname{tg} \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

найдем:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi-\vartheta) &= \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi-\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi-\vartheta}{2}} = \frac{(1+\rho)^2 \cos^2 \alpha - (1-\rho)^2 \sin^2 \alpha}{(1+\rho)^2 \cos^2 \alpha + (1-\rho)^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2\rho + (1+\rho^2) \cos 2\alpha}{1+\rho^2 + 2\rho \cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta) + \rho^2 &= 1+\rho^2 - 2\rho \frac{2\rho + (1+\rho^2) \cos 2\alpha}{1+\rho^2 + 2\rho \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{(1-\rho^2)^2}{1+2\rho \cos 2\alpha + \rho^2}, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi-\vartheta}{2} \right) \frac{d\varphi}{2} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \sec^2 \alpha d\alpha,$$

$$\begin{aligned} d\varphi &= 2 \frac{1-\rho}{1+\rho} \frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{1 + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2(1-\rho^2) d\alpha}{(1+\rho)^2 \cos^2 \alpha + (1-\rho)^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2(1-\rho^2) d\alpha}{1+2\rho \cos 2\alpha + \rho^2}, \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \frac{(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2} = 2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = 4\alpha_0, \quad (85)$$

где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{1+\rho}{1-\rho} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (86)$$

Как видно из (85) и (86),

$$\alpha_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \rho < 1, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \rho = 1,$$

$$\int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \frac{(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2} < 2\pi \quad \text{при } \rho < 1, \quad (87)$$

$$\int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \frac{(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2} = 2\pi \quad \text{при } \rho = 1. \quad (88)$$

Подставляя (88) в (82), найдём:

$$J_s(1, \vartheta) = F(\vartheta). \quad (89)$$

Подставляя (84) и (89) в (79'), найдём:

$$W(1, \vartheta) - F(\vartheta) = J_4(1, \vartheta). \quad (90)$$

Из (83) находим:

$$\left| J_4(\rho, \vartheta) \right| \leq \frac{\eta}{2\pi} \int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \frac{(1-\rho^2) d\varphi}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2} \leq \eta \quad \text{при } \rho \leq 1, \quad (91)$$

на основании (87) и (88). Здесь η максимальное абсолютное значение разности $F(\varphi) - F(\vartheta)$ при $\vartheta - \varepsilon \leq \varphi \leq \vartheta + \varepsilon$. Так как по предположению функция $F(\varphi)$ непрерывна в точке $\varphi = \vartheta$, то η будет сколь угодно малой при достаточно малом ε . Из (90) и (91) следует неравенство

$$\left| W(1, \vartheta) - F(\vartheta) \right| \leq \eta. \quad (92)$$

Но так как неравенство (92) справедливо при любом сколь угодно малом ε , а η стремится к нулю вместе с ε , из (92) следует:

$$W(1, \vartheta) = F(\vartheta), \quad (93)$$

т. е. функция $W(\rho, \vartheta)$, определяемая формулой (79), при $\rho = 1$ действительно обращается в заданную функцию $F(\vartheta)$. Полагая в (79)

$$F(\vartheta) = f(a \cos \vartheta) - P \ln \frac{2}{a}, \quad (94)$$

получим функцию $W(\rho, \vartheta)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (61) при $\rho < 1$ и граничному условию (62) при $\rho = 1$. Подставляя (94) в (79), найдём:

$$W(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a \cos \varphi) - P \ln \frac{2}{a}}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} d\varphi. \quad (95)$$

Полагая в (86) и (85) $\varepsilon = \pi$, найдём:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \varepsilon = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} = 2\pi. \quad (96)$$

Таким образом, формуле (95) можно придать вид:

$$W(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a \cos \varphi) (1 - \rho^2) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} - P \ln \frac{2}{a}. \quad (97)$$

Подставляя (97) в (63), найдём:

$$P = \frac{1}{2\pi \ln \frac{2}{a}} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) d\varphi. \quad (98)$$

Формулы (97) и (98) определяют искомую функцию $W(\rho, \vartheta)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (61) при $\rho < 1$ и условиям (62) и (63) при $\rho = 1$ и при $\rho = 0$. Чтобы найти искомую функцию $p(x)$, остаётся подставить (97) и (98) в (64). При $\rho < 1$, выполняя дифференцирование под знаком интеграла, из формулы (97) найдём:

$$\frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a \cos \varphi) [(1 + \rho^2) \cos(\varphi - \vartheta) - 2\rho] d\varphi}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^2}. \quad (99)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} \right) = \frac{(1 + \rho^2) \cos(\varphi - \vartheta) - 2\rho}{[1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2]^2}$$

и выполняя в (99) интегрирование по частям, придадим формуле (90) вид:

$$\frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(a \cos \varphi) \sin \varphi \sin(\varphi - \vartheta) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} \quad (100)$$

(по условию функция $f(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную).

Формально полагая в (100) $\rho = 1$ и принимая во внимание тождество

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{1 - \cos(\varphi - \vartheta)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \vartheta}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2},$$

найдем:

$$\frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \varphi) \sin \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi, \quad (101)$$

или

$$\frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi. \quad (102)$$

Не останавливаясь пока на вопросе о существовании полученного определённого интеграла (102) и подставляя (102) в (64), найдём:

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} \left[P - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi \right]. \quad (103)$$

Подставляя P из (98) в (103) и заменяя в (103) $a \cos \vartheta$ на x , найдём искомое решение $p(x)$ исходного уравнения (1).

Итак, для искомой функции p мы получили две формулы (71) и (103). Остановимся коротко на их сопоставлении.

Дифференцированием по ϑ из формулы (65) найдём:

$$\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \sin n\vartheta. \quad (104)$$

Если функция $\Phi(\vartheta)$ представляется рядом Фурье

$$\Phi(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \quad (105)$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta)$$

называют рядом, сопряжённым с рядом (105), и сумму этого ряда, если он сходится, обозначают через $\bar{\Phi}(\vartheta)$:

$$\bar{\Phi}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta). \quad (106)$$

Пользуясь этим обозначением, из (104) найдём:

$$\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \cos n\vartheta. \quad (107)$$

На основании (107) формуле (71) можно придать вид:

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} \left[P + \overline{\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta}} \right]. \quad (108)$$

В теории тригонометрических рядов доказывается, что суммы сопряжённых рядов $\Phi(\vartheta)$ и $\overline{\Phi(\vartheta)}$ связаны между собой зависимостью¹⁾

$$\overline{\Phi(\vartheta)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi. \quad (109)$$

Отсюда

$$\overline{\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi. \quad (110)$$

Подставляя (110) в (108), получим формулу

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} \left[P - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi \right],$$

совпадающую с формулой (103). Итак, если в общей формуле (108) функцию $\overline{\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta}}$ представить в виде тригонометрического ряда (107), сопряжённого с рядом Фурье (104) для функции $\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta}$, мы получим формулу (71), определяющую функцию p в виде бесконечного ряда. Если же воспользоваться интегральной формулой (110), мы получим из общей формулы (108) формулу (103), представляющую функцию p в виде определённого интеграла. При выводе формул (71) и (103) мы пришли к ряду (107) и к определённому интегралу (110), формально полагая $\rho = 1$ в первой из формул (68) и в формуле (100). Вопрос о сходимости ряда (107) и эквивалентный вопрос о существовании определённого интеграла (110), подинтегральная функция которого обращается в бесконечность при $\varphi = \vartheta$, остались при этом открытыми. В области теории тригонометрических рядов этим вопросам посвящено большое количество исследований. Не останавливаясь на этих обширных исследованиях, отметим лишь следующие. Функцию $f'(x)$ мы предполагаем кусочно-непрерывной. При этом ряд (104) будет всегда сходящимся (в частности, для точек разрыва функции $f'(x)$ этот ряд будет давать среднее арифметическое из предель-

¹⁾ См. Михлин С. Г., Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, ОГИЗ, 1947, стр. 91.

ных значений производной $\frac{df(a \cos \vartheta)}{d\vartheta}$ при подходе к точке разрыва справа и слева).

Однако сходимость ряда (104) не влечёт ещё за собой сходимость сопряжённого ряда (107). В частности, для точек разрыва функции $f'(x)$ этот ряд расходится, и соответственно, определённый интеграл (110) не имеет смысла. Решение $p(x)$ исходного уравнения (1) бесконечно возрастает при подходе к точке разрыва функции $f'(x)$. Ниже, в § 3, мы указываем некоторые достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f'(x)$, для того чтобы функция $p(x)$ оставалась ограниченной, и указываем при этом приём вычисления определённого интеграла, определяющего решение $p(x)$ исходного уравнения (1).

В заключение этого параграфа укажем ещё одно преобразование полученной нами для функции p формулы (103). Полагая

$$\varphi = 2\pi - \varphi',$$

найдем:

$$\begin{aligned} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} &= -a \sin \varphi f'(a \cos \varphi) = \\ &= a \sin \varphi' f'(a \cos \varphi') = -\frac{df(a \cos \varphi')}{d\varphi'}, \\ \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} &= \operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{\varphi' + \vartheta}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi' + \vartheta}{2}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi &= \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \varphi')}{d\varphi'} \operatorname{ctg} \frac{\varphi' + \vartheta}{2} d\varphi'. \end{aligned} \quad (111)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi &= \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \vartheta}{2} \right) d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (112)$$

так как

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \vartheta}{2} &= \\ &= \frac{\cos \frac{\varphi - \vartheta}{2} \sin \frac{\varphi + \vartheta}{2} + \cos \frac{\varphi + \vartheta}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}}{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} = \frac{\sin \varphi}{\frac{1}{2} (\cos \vartheta - \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

Подставляя (112) в (103), найдём:

$$p(a \cos \vartheta) = \frac{1}{\pi a |\sin \vartheta|} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta - \cos \varphi} d\varphi \right]. \quad (113)$$

Полагая

$$a \cos \vartheta = x, \quad a \cos \varphi = t, \quad (114)$$

найдем:

$$a |\sin \vartheta| = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi} = -a \sin \varphi f'(a \cos \varphi) = -\sqrt{a^2 - t^2} f'(t) \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$P(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right]. \quad (115)$$

Формуле (98) можно придать вид:

$$P = \frac{1}{\pi \ln \frac{2}{a}} \int_0^\pi f(a \cos \varphi) d\varphi,$$

или, полагая $a \cos \varphi = t$,

$$P = \frac{1}{\pi \ln \frac{2}{a}} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (116)$$

Формулы (115) и (116) определяют решение исходного уравнения (1).

§ 3. Решение основного уравнения плоской контактной задачи посредством функций комплексного переменного

В этом параграфе мы приводим ещё один вывод формулы (115), дающей решение уравнения (1). Этот вывод основан на элементарных понятиях о функциях комплексного переменного. В дальнейшем метод решения уравнения (1), приводимый в этой главе, даст нам возможность получить решение более общих уравнений.

Если в выражении для функции $F(x)$ аргумент x заменить комплексным числом $x + iy$, то мы получим в общем случае комплексное число $F(x + iy)$, действительную и мнимую части которого мы обозначим через u и v :

$$u + iv = F(x + iy). \quad (117)$$

Если изменять действительную и мнимую части комплексного числа $x + iy$, то при этом будут меняться действительная и мнимая части комплексного числа $u + iv$. Иными словами, u и v будут функциями двух переменных x и y :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (118)$$

Так, например, если $F(x) = x^2$, то $F(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, и в данном случае $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Исследуем свойства функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определяемых соотношением (117).

Дифференцируя (117), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} &= F'(x + iy), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} &= iF'(x + iy), \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

откуда

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (120)$$

Сравнивая действительные и мнимые части правой и левой частей соотношения (120), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Как мы уже знаем из § 1, соотношения (121) свидетельствуют о том, что функция $v(x, y)$ будет гармонической функцией переменных x, y , сопряжённой с гармонической функцией $u(x, y)$. Таким образом, зависимость (117) каждой функции $F(x)$ ставит в соответствие пару сопряжённых гармонических функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые мы найдём, отделяя действительную и мнимую части в выражении $F(x + iy)$. Обозначив через z комплексное число $x + iy$, будем называть $F(z)$ функцией комплексного переменного z . Действительную и мнимую части $F(z)$ будем соответственно обозначать через $\operatorname{Re} F(z)$ и $\operatorname{Im} F(z)$:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} F(z). \quad (122)$$

Итак, действительная и мнимая части $\operatorname{Re} F(z)$ и $\operatorname{Im} F(z)$ функции комплексного переменного $F(z)$ являются сопряжёнными гармоническими функциями переменных x и y .

Рассмотрим теперь функцию комплексного переменного z :

$$F(z) = \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t - z}. \quad (123)$$

Находим:

$$F(z) = \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t - x - iy} = \int_{-a}^a \frac{p(t)(t - x + iy) dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (124)$$

Отделяя действительную и мнимую части в (124), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= \int_{-a}^a \frac{p(t)(t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2}, \\ \operatorname{Im} F(z) &= \int_{-a}^a \frac{p(t)y dt}{(t-x)^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Сравнивая (125) и (5), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \\ \operatorname{Im} F(z) &= -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Итак, функция $F(z)$, определяемая соотношением (123), связана с логарифмическим потенциалом простого слоя $V(x, y)$, определяемым формулой (2), соотношениями (126), откуда

$$F(z) = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (127)$$

Условие (4) для функции $V(x, y)$, согласно (126), даёт:

$$\operatorname{Re} F(z) = f'(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad |x| < a. \quad (128)$$

Второе из соотношений (125) непосредственно даёт:

$$\operatorname{Im} F(z) = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad |x| > a. \quad (129)$$

Наконец, из (24) и (126) следует:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} F(z) &= \pi p(x) \quad \text{при} \quad y = +0, \quad |x| < a, \\ \operatorname{Im} F(z) &= -\pi p(x) \quad \text{при} \quad y = -0, \quad |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Разложение функции $F(z)$, определяемой соотношением (123), в ряд по степеням $1/z$, или, как говорят, разложение в окрестности бесконечно удалённой точки плоскости xOy , даёт:

$$F(z) = - \int_{-a}^a p(t) \left(\frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \frac{t^2}{z^3} + \dots \right) dt = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots, \quad (131)$$

где a_0, a_1, a_2, \dots — действительные числа, причём

$$a_0 = - \int_{-a}^a p(t) dt,$$

или

$$a_0 = -P \quad (132)$$

согласно обозначению (27). Таким образом, в окрестности бесконечно удалённой точки плоскости xOy функция $F(z)$ должна иметь разложение

$$F(z) = -\frac{P}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots \quad (133)$$

Итак, решение уравнения (1) сведено нами к построению функции комплексного переменного $F(z)$, удовлетворяющей условиям (128) и (129) на оси Ox и условию (133) в бесконечно удалённой точке. Построив функцию $F(z)$, мы сможем найти решение $p(x)$ уравнения (1) по одной из формул (130).

Рассмотрим сначала простейший случай, в котором

$$f(x) = a = \text{const.} \quad \text{при} \quad |x| < a. \quad (134)$$

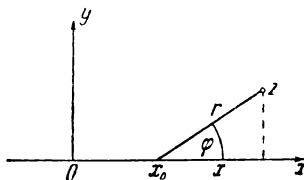


Рис. 1.

Обозначив через $F_0(z)$ функцию комплексного переменного z , решающую в этом случае поставленную задачу, найдём для неё, согласно (128) и (129), условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_0(z) &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad |x| < a, \\ \operatorname{Im} F_0(z) &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad |x| > a. \end{aligned} \quad (135)$$

Рассмотрим функцию

$$z - x_0, \quad (136)$$

где x_0 — действительная постоянная. Находим:

$$z - x_0 = x - x_0 + iy.$$

Полагая

$$x - x_0 = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

(рис. 1), найдём:

$$z - x_0 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Отсюда

$$\sqrt{z - x_0} = \sqrt{r} e^{i \frac{\varphi}{2}}. \quad (137)$$

Для определённости будем считать, что

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x > x_0 \quad (138)$$

и далее (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \pi \quad \text{при} \quad y = +0, \quad x < x_0, \\ \varphi &= -\pi \quad \text{при} \quad y = -0, \quad x < x_0. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

В то же время

$$r = |x - x_0| \quad \text{при } y = 0. \quad (140)$$

Из соотношений (137), (139) и (140) следует:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{z - x_0} &= \sqrt{x - x_0} && \text{при } y = 0, \quad x > x_0, \\ \sqrt{z - x_0} &= i \sqrt{x_0 - x} && \text{при } y = +0, \quad x < x_0, \\ \sqrt{z - x_0} &= -i \sqrt{x_0 - x} && \text{при } y = -0, \quad x < x_0, \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

так как

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i.$$

Полагая в (141) $x_0 = a$ и $x_0 = -a$, найдём:

$$\begin{aligned} \sqrt{z - a} &= \sqrt{x - a}, \quad x > a, \\ \sqrt{z + a} &= \sqrt{x + a}, \quad x > -a, \quad y = 0, \\ \sqrt{z - a} &= i \sqrt{a - x}, \quad x < a, \\ \sqrt{z + a} &= i \sqrt{-a - x}, \quad x < -a, \quad y = +0, \\ \sqrt{z - a} &= -i \sqrt{a - x}, \quad x < a, \\ \sqrt{z + a} &= -i \sqrt{-a - x}, \quad x < -a, \quad y = -0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{z^2 - a^2} &= \sqrt{x^2 - a^2}, && x > a, \quad y = 0, \\ \sqrt{z^2 - a^2} &= i \sqrt{a^2 - x^2}, && -a < x < a, \quad y = +0, \\ \sqrt{z^2 - a^2} &= -i \sqrt{a^2 - x^2}, && -a < x < a, \quad y = -0, \\ \sqrt{z^2 - a^2} &= -\sqrt{x^2 - a^2}, && x < -a, \quad y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Покажем теперь, что функция

$$F_0(z) = -\frac{P}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (143)$$

удовлетворяет всем поставленным условиям.

Действительно,

$$\begin{aligned} F_0(z) &= -\frac{P}{z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{P}{z} \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} + \frac{3a^4}{8z^4} + \dots\right) = \\ &= -\frac{P}{z} - \frac{Pa^2}{2z^3} - \frac{3Pa^4}{8z^5} - \dots, \end{aligned} \quad (144)$$

т. е. условие (133) выполняется. Подставляя (142) в (143), найдём:

$$\left. \begin{aligned} F_0(z) &= -\frac{P}{\sqrt{x^2-a^2}}, & x > a, \\ F_0(z) &= \frac{P}{\sqrt{x^2-a^2}}, & x < -a, \quad y=0, \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0(z) &= \frac{iP}{\sqrt{a^2-x^2}}, & y = +0, \\ F_0(z) &= -\frac{iP}{\sqrt{a^2-x^2}}, & y = -0, \quad |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Соотношения (145) и (146) показывают, что выполняется условие (135).

Сравнивая (130) и (146), найдём:

$$p(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2-x^2}}, \quad (147)$$

что совпадает с найденным ранее решением (74).

Переходя к общему случаю, будем искать функцию $F(z)$, удовлетворяющую условиям (128), (129) и (133), в виде

$$F(z) = F_0(z) \Phi(z), \quad (148)$$

сводя определение функции $F(z)$ к нахождению функции $\Phi(z)$. Как видно из (146), при $|x| < a$, $y = \pm 0$ функция $F_0(z)$ чисто мнимая. Следовательно,

$$\operatorname{Re} F(z) = iF_0(z) \operatorname{Im} \Phi(z) \quad \text{при} \quad |x| < a, \quad y = \pm 0. \quad (149)$$

Подставляя в (149), (128) и (146), найдём:

$$f'(x) = -\frac{P}{\sqrt{a^2-x^2}} \operatorname{Im} \Phi(z), \quad y = +0, \quad |x| < a,$$

$$f'(x) = \frac{P}{\sqrt{a^2-x^2}} \operatorname{Im} \Phi(z), \quad y = -0, \quad |x| < a,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= -\frac{1}{P} \sqrt{a^2-x^2} f'(x), & |x| < a, \quad y = +0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= \frac{1}{P} \sqrt{a^2-x^2} f'(x), & |x| < a, \quad y = -0. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Как видно из (145), при $|x| > a$, $y = 0$ функция $F_0(z)$ действительная. Следовательно,

$$\operatorname{Im} F(z) = F_0(z) \operatorname{Im} \Phi(z) \quad \text{при } |x| > a, y = 0. \quad (151)$$

Подставляя (129) и (145) в (151), найдём:

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = 0 \quad \text{при } |x| > a, y = 0. \quad (152)$$

Будем искать $\Phi(z)$ в виде:

$$\Phi(z) = \int_{-a}^a \frac{q(t) dt}{t-z} + c, \quad (153)$$

где c — действительная постоянная. Пользуясь формулами (123), (129) и (130), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= \pi q(x) & \text{при } |x| < a, y = +0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= -\pi q(x) & \text{при } |x| < a, y = -0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= 0 & \text{при } |x| > a, y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Сравнивая (150) и (152) с (154), придём к тому выводу, что функция $\Phi(z)$, определяемая соотношением (153), будет удовлетворять поставленным условиям (150) и (152), если положить

$$q(x) = -\frac{1}{\pi P} \sqrt{a^2 - x^2} f'(x). \quad (155)$$

Подставляя (155) в (153), найдём,

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi P} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt}{t-z} + c. \quad (156)$$

Подставляя (143) и (156) в (148), найдём:

$$F(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \left[\int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt}{t-z} - \pi P c \right]. \quad (157)$$

Итак, функция $F(z)$, определяемая соотношением (157), удовлетворяет условиям (129) и (130). Раскладывая эту функцию в ряд по степеням $1/z$, найдём:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\pi z} \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} + \dots \right) \left(\frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \dots - \pi P c \right) = \\ &= -\frac{Pc}{z} + \frac{b_0}{\pi z^2} + \dots, \quad (158) \end{aligned}$$

где b_0, b_1, b_2, \dots — некоторые действительные коэффициенты. Сравнивая (133) и (158), придём к тому выводу, что условие

(133) будет выполняться, если положить

$$c = 1. \quad (159)$$

Подставляя (159) в (157), найдём:

$$F(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \left[\int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - z} - \pi P \right]. \quad (160)$$

Чтобы найти искомую функцию $p(x)$, остаётся подставить (160) в (130). Согласно (142) функция $\sqrt{z^2 - a^2}$ при $|x| < a$, $y = \pm 0$ чисто мнимая. Следовательно,

$$\operatorname{Im} F(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \left[\operatorname{Re} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - z} - \pi P \right] \quad (161)$$

при $|x| < a$, $y = \pm 0$.

Принимая во внимание соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - z} &= \operatorname{Re} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t - x + iy) dt}{(t - x)^2 + y^2} = \\ &= \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t - x) dt}{(t - x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

и соотношения (142), найдём:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(z) &= \\ &= -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t - x) dt}{(t - x)^2 + y^2} - \pi P \right] \\ &\quad \text{при } |x| < a, y = +0, \\ \operatorname{Im} F(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\lim_{y \rightarrow -0} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t - x) dt}{(t - x)^2 + y^2} - \pi P \right] \\ &\quad \text{при } |x| < a, y = -0. \end{aligned} \quad (162)$$

Формально переходя к пределу в формулах (162), т. е. полагая в определённых интегралах, входящих в эту формулу, $y = 0$ и сравнивая (130) и (162), найдём:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right], \quad (163)$$

что полностью совпадает с полученной в § 2 формулой (115).

Остановимся на этот раз более подробно на последнем предельном переходе, приводящем нас к формуле (163).

Разобьём определённый интеграл

$$J(x, y) = \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2} \quad (164)$$

на четыре слагаемых:

$$J(x, y) = J_1(x, y) + J_2(x, y) + J_3(x, y) + J_4(x, y), \quad (164')$$

где

$$J_1(x, y) = \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad (165)$$

$$J_2(x, y) = \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} (t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad (166)$$

$$J_3(x, y) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{[f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} - f'(x) \sqrt{a^2 - x^2}] (t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad (167)$$

$$J_4(x, y) = f'(x) \sqrt{a^2 - x^2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{(t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2}. \quad (168)$$

В определённых интегралах (165) при $y=0$ подынтегральные функции остаются ограниченными во всей области интегрирования. Таким образом,

$$J_1(x, 0) = \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt, \quad J_2(x, 0) = \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt. \quad (169)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{(t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2} &= \frac{1}{2} \ln [(t-x)^2 + y^2]_{t=x-\varepsilon}^{t=x+\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(\varepsilon^2 + y^2) - \ln(\varepsilon^2 + y^2)] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$J_4(x, y) = 0, \quad y > 0 \text{ и } y < 0. \quad (170)$$

На основании (169) и (170) из формулы (164') найдём:

$$\begin{aligned} J(x, \pm 0) &= \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt - \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt = \\ &= J_3(x, \pm 0). \quad (171) \end{aligned}$$

Остаётся исследовать предельные значения $J_3(x, +0)$ и $J_3(x, -0)$ определённого интеграла $J_3(x, y)$. Говорят, что функция $\varphi(t)$ в точке $t=x$ удовлетворяет условиям Липшица, если в достаточно малом интервале $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ можно подобрать такие две положительные постоянные M и α ($0 < \alpha \leq 1$), чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq M |t - x|^\alpha \quad \text{при } x - \varepsilon \leq t \leq x + \varepsilon. \quad (172)$$

Если две функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условию Липшица в точке $t=x$, т. е.

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_1(x)| &\leq M_1 |t - x|^{\alpha_1}, & |\varphi_2(t) - \varphi_2(x)| &\leq M_2 |t - x|^{\alpha_2}, \\ 0 < \alpha_1 &\leq 1, & 0 < \alpha_2 &\leq 1, & x - \varepsilon &\leq t \leq x + \varepsilon, \end{aligned} \quad (173)$$

то и произведение их

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \quad (174)$$

также будет удовлетворять условию Липшица. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(x) &= \varphi_1(t) \varphi_2(t) - \varphi_1(x) \varphi_2(x) = \\ &= [\varphi_1(t) - \varphi_1(x)] \varphi_2(x) + [\varphi_2(t) - \varphi_2(x)] \varphi_1(t), \end{aligned}$$

откуда на основании (173)

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(x)| &\leq M_1 |t - x|^{\alpha_1} |\varphi_2(x)| + M_2 |t - x|^{\alpha_2} m_1 \leq M |t - x|^\alpha, \\ x - \varepsilon &\leq t \leq x + \varepsilon, \end{aligned} \quad (175)$$

где m_1 — максимальное абсолютное значение функции $\varphi_1(t)$ в интервале $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $M = M_1 |\varphi_2(x)| + M_2 m_1$, α — меньшее из чисел α_1 и α_2 (в (175) мы предполагаем, что ε во всяком случае меньше единицы).

Итак, пусть функция $f'(t)$ удовлетворяет в точке $t=x$ ($-a < x < a$) условию Липшица. Тогда и функция $f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}$ будет удовлетворять условию Липшица в этой точке, так как при $-a < x < a$ $\sqrt{a^2 - t^2}$ удовлетворяет условию Липшица с α , равным единице:

$$|\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{a^2 - x^2}| \leq m |t - x|, \quad x - \varepsilon \leq t \leq x + \varepsilon,$$

где m — наибольшее абсолютное значение производной по t от $\sqrt{a^2 - t^2}$ в интервале $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Таким образом, будет иметь место неравенство

$$\begin{aligned} |f'(t) \sqrt{a^2 - t^2} - f'(x) \sqrt{a^2 - x^2}| &\leq M |t - x|^\alpha, & 0 < \alpha &\leq 1, \\ x - \varepsilon &\leq t \leq x + \varepsilon. \end{aligned} \quad (176)$$

На основании (176) из (167) находим:

$$|J_s(x, y)| \leq M \int_{x-s}^{x+s} \frac{|t-x|^{1+\alpha} dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (177)$$

При $y=0$ подинтегральная функция в (177) обращается в $|t-x|^{\alpha-1}$ и остаётся интегрируемой, так как $0 < \alpha \leq 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |J_s(x, \pm 0)| &\leq M \int_{x-s}^{x+s} |t-x|^{\alpha-1} dt = \\ &= 2M \int_x^{x+s} (t-x)^{\alpha-1} dt = \frac{2M}{\alpha} (t-x)^\alpha \Big|_{t-x}^{t-x+s} = \frac{2M}{\alpha} s^\alpha. \end{aligned} \quad (178)$$

На основании (178) из (171) находим:

$$|J(x, \pm 0) - \int_{-a}^{x-s} \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt - \int_{x+s}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt| \leq \frac{2M}{\alpha} s^\alpha. \quad (179)$$

Из (179) видно, что $J(x, y)$ остаётся ограниченным, когда y стремится к нулю, причём

$$J(x, \pm 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{x-s} \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt + \int_{x+s}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt \right). \quad (180)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (180), называют главным значением интеграла

$$\int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt, \quad (181)$$

и пользуются для него обычным обозначением определённого интеграла, оговаривая то, что под написанным интегралом следует понимать его главное значение, т. е. предел суммы двух частей этого интеграла, стоящий в правой части равенства (180).

Итак, на основании (180) из (164) находим:

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2} (t-x) dt}{(t-x)^2 + y^2} = \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2-t^2}}{t-x} dt, \quad (182)$$

если функция $f'(t)$ удовлетворяет условию Липшица в точке

$t = x$ ($-a < x < a$), причём под определённым интегралом, стоящим в правой части соотношения (182), следует понимать его главное значение, т. е. предел, указанный в правой части формулы (180).

Подставляя (182) в (162), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} F(z) &= -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt - \pi P \right) \\ &\quad \text{при } |x| < a, y = +0, \\ \operatorname{Im} F(z) &= \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt - \pi P \right) \\ &\quad \text{при } |x| < a, y = -0, \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

откуда, согласно (130),

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right]. \quad (184)$$

Итак, для того случая, когда в точке $t = x$ ($-a < x < a$) функция $f'(t)$ удовлетворяет условию Липшица, мы обосновали вывод формулы (163), ранее полученной нами в результате формального предельного перехода, и доказали, что функция $p(x)$, определяемая формулой (163), будет в этом случае ограниченной, причём под определённым интегралом, входящим в формулу (163), надлежит понимать его главное значение и вычислять его как предел сумм:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right). \end{aligned} \quad (185)$$

Рассмотрим в качестве примера тот случай, когда

$$f(x) = a - A|x|^{k+1} \quad (0 \leq k \leq 1), \quad (186)$$

т. е.

$$f(x) = a - Ax^{k+1} \quad \text{при } x > 0 \quad \text{и} \quad f(x) = a - A(-x)^{k+1} \quad (187)$$

при $x < 0$.

Дифференцируя (187), найдём:

$$f'(x) = -A(k+1)x^k \quad \text{при } x > 0, \quad f'(x) = A(k+1)(-x)^k \quad (188)$$

при $x < 0$.

Подставляя (188) в (184), найдём:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left(P + A \frac{k+1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\pm |t|^k \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt \right), \quad (189)$$

причём под знаком интеграла в (189) знак плюс надлежит брать при $t > 0$, знак минус при $t < 0$, и под этим интегралом следует понимать его главное значение. Как видно из (188), при $x \neq 0$ функция $f'(x)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha = 1$. При $x = 0$ функция $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha = k$, если $0 < k \leq 1$, и не удовлетворяет условию Липшица, если $k = 0$. В частности, при $k = 0$ функция $f'(x)$ в точке $x = 0$ претерпевает разрыв:

$$f'(x) = -A \text{ при } x > 0, \quad f'(x) = A \text{ при } x < 0.$$

Итак, если $0 < k \leq 1$, то функция $p(x)$, определяемая формулой (189), будет ограниченной везде внутри интервала $(-a, a)$. При $k = 0$ мы можем лишь утверждать, что функция $p(x)$ будет ограниченной при $-a < x < 0$ и $0 < x < a$.

Проведём выкладку до конца для предельного случая $k = 0$. В этом случае формула (189) принимает вид:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left(P + \frac{A}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\pm \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt \right). \quad (190)$$

Находим:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\pm \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt &= \int_{-a}^a \frac{a^2 - x^2 + x^2 - t^2}{\pm \sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} dt = \\ &= \frac{a^2 - x^2}{x} \int_{-a}^a \frac{dt}{\pm \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} - \int_{-a}^a \frac{t+x}{\pm \sqrt{a^2 - t^2}} dt. \end{aligned} \quad (191)$$

Полагая далее

$$t = \frac{2a\tau}{1+\tau^2}, \quad x = \frac{2a\xi}{1+\xi^2} \left(\tau = \frac{a - \sqrt{a^2 - t^2}}{t}, \quad \xi = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right), \quad (192)$$

найдем:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{2a(1-\tau^2)d\tau}{(1+\tau^2)^2}, \\ \sqrt{a^2 - t^2} &= \sqrt{a^2 - \frac{4a^2\tau^2}{(1+\tau^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1-\tau^2)^2}{(1+\tau^2)^2}} = \frac{a(1-\tau^2)}{1+\tau^2}, \\ \frac{t}{x} - 1 &= \frac{\tau(1+\xi^2)}{\xi(1+\tau^2)} - 1 = -\frac{(\tau-\xi)(\xi\tau-1)}{\xi(1+\tau^2)} = -\frac{(\tau-\xi)\left(\tau - \frac{1}{\xi}\right)}{1+\tau^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} &= -2 \frac{d\tau}{(\tau - \xi) \left(\tau - \frac{1}{\xi} \right)} = \\ &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \left(\frac{1}{\tau - \xi} + \frac{1}{\frac{1}{\xi} - \tau} \right) d\tau = \\ &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} d \ln \frac{\tau - \xi}{\frac{1}{\xi} - \tau} = \frac{2\xi}{1 - \xi^2} d \ln \frac{\xi - \tau}{\frac{1}{\xi} - \tau}. \quad (193) \end{aligned}$$

Находя главное значение определённого интеграла

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} \quad \text{при } 0 < x < a,$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} &= - \int_{-a}^0 \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\epsilon} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} + \int_{x+\epsilon}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} \right]. \quad (194) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (193) и (192), находим:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} &= \\ &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \left[\ln \frac{\xi - \tau}{\frac{1}{\xi} - \tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=-1} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\ln \frac{\xi - \tau}{\frac{1}{\xi} - \tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\tau_1} + \ln \frac{\tau - \xi}{\frac{1}{\xi} - \tau} \Big|_{\tau=\tau_2}^{\tau=1} \right) \right] = \\ &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \frac{(1 + \xi) \frac{1}{\xi} (\xi - \tau_1) \frac{1}{\xi} (1 - \xi) \left(\frac{1}{\xi} - \tau_2 \right)}{\left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \xi \left(\frac{1}{\xi} - \tau_1 \right) \xi \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) (\tau_2 - \xi)} = \\ &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \left[\ln \frac{1}{\xi^2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \frac{(\xi - \tau_1) \left(\frac{1}{\xi} - \tau_2 \right)}{\left(\frac{1}{\xi} - \tau_1 \right) (\tau_2 - \xi)} \right], \quad (195) \end{aligned}$$

где

$$\tau_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - (x - \epsilon)^2}}{x - \epsilon}, \quad \tau_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - (x + \epsilon)^2}}{x + \epsilon}. \quad (196)$$

Согласно (192) и (196) находим:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{(\xi - \tau_1) \left(\frac{1}{\xi} - \tau_2 \right)}{\left(\frac{1}{\xi} - \tau_1 \right) (\tau_2 - \xi)} &= \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\left[\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \frac{a - \sqrt{a^2 - (x - \varepsilon)^2}}{x - \varepsilon} \right]}{\left[\frac{x}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - (x - \varepsilon)^2}}{x - \varepsilon} \right]} \times \\
 &\quad \times \frac{\left[\frac{x}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - (x + \varepsilon)^2}}{x + \varepsilon} \right]}{\left[\frac{a - \sqrt{a^2 - (x + \varepsilon)^2}}{x + \varepsilon} - \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right]} = \\
 &= \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-a\varepsilon - (x - \varepsilon)\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - (x - \varepsilon)^2}}{-x\sqrt{a^2 - (x + \varepsilon)^2} - a\varepsilon + (x + \varepsilon)\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
 &= \ln \frac{-a + \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{-a + \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = 0. \tag{197}
 \end{aligned}$$

Подставляя (197) в (195) и заменяя после этого ξ на x , согласно (192), найдём:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \frac{dt}{\pm \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} &= -\frac{4\xi}{1 - \xi^2} \ln \xi = \\
 &= 4 \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x \left[1 - \frac{(a - \sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2} \right]} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \\
 &= -\frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad 0 < x < a. \tag{198}
 \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для случая $-a < x < 0$, найдём:

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\pm \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} = -\frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{-x}, \quad -a < x < 0. \tag{199}$$

Формулы (198) и (199) можно объединить в одну:

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\pm \sqrt{a^2 - t^2} \left(\frac{t}{x} - 1 \right)} = -\frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|}, \quad 0 < |x| < a. \tag{200}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{(t+x) dt}{\pm \sqrt{a^2-t^2}} &= \int_{-a}^a \frac{t dt}{\pm \sqrt{a^2-t^2}} + x \int_{-a}^a \frac{dt}{\pm \sqrt{a^2-t^2}} = \\ &= 2 \int_0^a \frac{t dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = 2 \sqrt{a^2-t^2} \Big|_a^0 = 2a. \end{aligned} \quad (201)$$

Подставляя (200) и (201) в (191) и (190), найдём:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2-x^2}} \left(P - \frac{2aA}{\pi} - \frac{2A}{\pi} \sqrt{a^2-x^2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{|x|} \right), \quad (202)$$

$$0 < |x| < a.$$

Как видно из (202), найденное решение уравнения (1) стремится к бесконечности, когда x стремится к нулю. Когда $|x| \rightarrow a$, найденная функция $p(x)$ также стремится к бесконечности, за исключением того случая, когда

$$P = \frac{2A}{\pi} a. \quad (203)$$

В этом частном случае

$$p(x) = -\frac{2A}{\pi^2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{|x|}, \quad 0 < |x| < a, \quad (204)$$

и обращается в нуль при $|x| = a$.

Подставляя (187) в (116), найдём:

$$P = \frac{1}{\pi \ln \frac{2}{a}} \left(\alpha \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} - A \int_{-a}^a \frac{\pm t dt}{\sqrt{a^2-t^2}} \right). \quad (205)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} &= \arcsin \frac{t}{a} \Big|_{-a}^a = \pi, \\ \int_{-a}^a \frac{\pm t dt}{\sqrt{a^2-t^2}} &= 2 \int_0^a \frac{t dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = 2 \sqrt{a^2-t^2} \Big|_a^0 = 2a. \end{aligned} \quad (206)$$

Подставляя (206) в (205), найдём:

$$P = \frac{1}{\ln \frac{2}{a}} \left(\alpha - \frac{2Aa}{\pi} \right). \quad (207)$$

Сравнивая (203) и (207), найдём, что условие (203), при котором исходное уравнение (1) имеет решение (204), будет выполняться в том случае, если будет иметь место равенство

$$\frac{2Aa}{\pi} \left(1 + \ln \frac{2}{a} \right) = \alpha. \quad (208)$$

Формулы (202) и (207) решают рассматриваемую задачу в общем случае, при произвольных значениях постоянных a , α и A ; если же выполняется условие (208), формулы (202) и (207) переходят соответственно в формулы (204) и (203).

§ 4. Случай нескольких участков интегрирования в основном уравнении контактной задачи

Рассмотрим теперь решение уравнения, более общего, чем уравнение (1):

$$\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (209)$$

где $f(x)$ — функция, заданная в n интервалах аргумента x , $a_m < x < b_m$ ($m=1, 2, \dots, n$), а $p(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению в этих n интервалах аргумента. В том частном случае, когда $n=1$, $a_1 = -a$, $b_1 = a$, уравнение (209) переходит в уравнение (1).

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$F(z) = \sum_{m=1}^n F_m(z), \quad (210)$$

где

$$F_m(z) = \int_{a_m}^{b_m} \frac{p(t) dt}{t-z} \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (211)$$

Согласно (127)

$$F_m(z) = \frac{\partial V_m}{\partial x} - i \frac{\partial V_m}{\partial y}, \quad (212)$$

где

$$V_m(x, y) = \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{\sqrt{(t-x)^2 + y^2}} dt \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (213)$$

Уравнение (209) эквивалентно условию

$$\sum_{m=1}^n V_m(x, 0) = f(x), \quad a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (214)$$

налагаемому на функции $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$, ..., $V_n(x, y)$, или условию

$$\operatorname{Re} F(z) = \sum_{m=1}^n \operatorname{Re} F_m(z) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial V_m}{\partial x}(x, 0) = f'(x) \quad (215)$$

при $y=0$, $a_m < x < b_m$ ($m=1, 2, \dots, n$),

налагаемому на функцию $F(z)$.

Соотношениям (129) и (130) будут отвечать соотношения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} F_m(z) = 0 & \quad \text{при } y=0, x < a_m \text{ и } x > b_m, \\ \operatorname{Im} F_m(z) = \pm \pi p(x) & \quad \text{при } y = \pm 0, a_m < x < b_m \end{aligned} \right\} (m=1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\operatorname{Im} F(z) = \sum_{m=1}^n \operatorname{Im} F_m(z) = 0 \quad \text{при } y=0, \quad (216)$$

$$x < a_1, \quad b_m < x < a_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots, n-1), \quad b_n < x,$$

$$\operatorname{Im} F(z) = \pm \pi p(x) \quad \text{при } y = \pm 0, a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (217)$$

так как при $y = \pm 0$, $a_m < x < b_m$, $\operatorname{Im} F_k(z) = 0$ при $k \neq m$ и $\operatorname{Im} F_k(z) = \pm \pi p(x)$ при $k = m$.

Согласно (133) разложение функции $F_m(z)$ в окрестно бесконечно удалённой точки будет иметь вид:

$$F_m(z) = -\frac{P_m}{z} + \frac{a_{1m}}{z^2} + \dots, \quad \text{где } P_m = \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt,$$

откуда

$$F(z) = \sum_{m=1}^n F_m(z) = -\frac{P}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \dots, \quad (218)$$

где

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt.$$

Итак, построив функцию $F(z)$, удовлетворяющую условиям (215) и (216) на оси Ox и условию (218) в окрестности бесконечно удалённой точки, мы найдём искомую функцию $p(x)$ по формуле (217). Для простоты ограничимся рассмотрением функции $F(z)$ в верхней полуплоскости $y > 0$ и функцию $p(x)$ будем определять согласно (217) по формуле:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(z) \quad \text{при } y = +0; a_m < x < b_m \quad (219)$$

$$(m=1, 2, \dots, n).$$

Как и в § 3, рассмотрим сначала тот частный случай задачи, в котором $f(x) = \text{const}$ и соответственно

$$f'(x) = 0 \quad \text{при } a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (220)$$

Покажем, что в этом случае функция

$$F_0(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)}}, \quad (221)$$

где $P_{n-1}(z)$ — полином степени $n-1$ от z с действительными коэффициентами:

$$P_{n-1}(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_{n-1}z^{n-1}, \quad (222)$$

удовлетворяет условиям (215) и (216), т. е. покажем, что

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } F_0(z) = 0 \quad \text{при } a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad y = +0, \\ \text{Im } F_0(z) = 0 \quad \text{при } x < a_1, \\ b_m < x < a_{m+1} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1), \quad b_n < x, \quad y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Согласно (141)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z-a_m}} &= \frac{1}{i\sqrt{x-a_m}} && \text{при } x > a_m, \\ \frac{1}{\sqrt{z-a_m}} &= -\frac{i}{\sqrt{a_m-x}} && \text{при } x < a_m, \\ \frac{1}{\sqrt{z-b_m}} &= \frac{1}{\sqrt{x-b_m}} && \text{при } x > b_m, \\ \frac{1}{\sqrt{z-b_m}} &= -\frac{i}{\sqrt{b_m-x}} && \text{при } x < b_m, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y = +0, \\ m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (224)$$

Полагая в (221) $y = +0$ и принимая во внимание (224), найдём:

$$F_0(z) = \frac{P_{n-1}(x)}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)}} \\ \text{при } x > b_n, \quad y = +0,$$

$$F_0(z) = -\frac{iP_{n-1}(x)}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_{n-1})(b_n-x)}} \\ \text{при } a_n < x < b_n, \quad y = +0,$$

$$F_0(z) = -\frac{P_{n-1}(x)}{\sqrt{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})(a_n-x)(x-b_1)\dots(x-b_{n-1})(b_n-x)}} \\ \text{при } b_{n-1} < x < a_n, \quad y = +0,$$

$$F_0(z) = \frac{iP_{n-1}(x)}{\sqrt{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})(a_n-x)(x-b_1)\dots(x-b_{n-2})(b_{n-1}-x)(b_n-x)}} \\ \text{при } a_{n-1} < x < b_{n-1}, \quad y = +0$$

и т. д., т. е.

$$F_0(z) = (-1)^{n-m+1} \frac{iP_{n-1}(x)}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \quad (225)$$

при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), $y = +0$,

$$F_0(z) = (-1)^{n-m} \frac{P_{n-1}(x)}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \quad (226)$$

при $b_m < x < a_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), $y = +0$, если принять $b_0 = -\infty$, $a_{n+1} = \infty$:

Формулы (225) и (226) показывают, что соотношения (223) действительно имеют место.

Находим, далее, согласно (221):

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \frac{P_{n-1}(z)}{z^n \sqrt{\prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{a_m}{z}\right) \left(1 - \frac{b_m}{z}\right)}} = \\ &= \frac{1}{z^n} (c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}) \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{a_m}{2z} + \frac{3a_m^2}{8z^2} + \dots\right) \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{b_m}{2z} + \frac{3b_m^2}{8z^2} + \dots\right) = \frac{c_{n-1}}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \dots, \quad (227) \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — некоторые действительные коэффициенты. Сравнивая (227) и (218), найдём, что функция $F_0(z)$ будет удовлетворять и условию (218), если положить

$$c_{n-1} = -P = - \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt. \quad (228)$$

Согласно (219), (225) и (228) находим:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(-1)^{n-m+1} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-2} x^{n-2} - Px^{n-1})}{\pi \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}}, \\ & \quad a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (229) \end{aligned}$$

Формула (229) даёт решение уравнения (209) для того частного случая, когда $f'(x) = 0$ при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$). При $n = 1$ (229) переходит в ранее найденную для этого случая формулу (147).

Переходя к общему случаю, будем искать функцию $F(z)$, удовлетворяющую условиям (215), (216) и (218), в виде:

$$F(z) = \frac{F_0(z)}{P_{n-1}(z)} \Phi(z), \quad (230)$$

сводя определение функции $F(z)$ к нахождению функции $\Phi(z)$.

Как видно из (225), при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) $y = +0$ функция $F_0(z)$ чисто мнимая, полином же $P_{n-1}(z)$ при $y = +0$ приобретает действительные значения. Следовательно,

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{F_0(z)}{P_{n-1}(z)} i \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (231)$$

при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), $y = +0$.

Подставляя в (231), (225) и (215), найдём, что условию (215) для функции $F(z)$ будет соответствовать условие

$$f'(x) = \frac{(-1)^{n-m}}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} \operatorname{Im} \Phi(z),$$

т. е. условие

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = (-1)^{n-m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)} |f'(x) \quad (232)$$

при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), $y = +0$ для функции $\Phi(z)$.

Как видно из (226), при $b_m < x < a_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), $y = +0$ функция $F_0(z)$ приобретает действительные значения. Следовательно,

$$\operatorname{Im} F(z) = \frac{F_0(z)}{P_{n-1}(z)} \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (233)$$

при $b_m < x < a_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), $y = +0$,

и условие (216) для функции $F(z)$ сводится к условию

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = 0 \quad \text{при } b_m < x < a_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \quad y = +0 \quad (234)$$

для функции $\Phi(z)$. Будем искать функцию $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{q(t) dt}{t-z} + P_{n-1}(z). \quad (235)$$

Согласно (216) и (217) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= 0 \\ &\text{при } b_m < x < a_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \quad y = +0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= \pi q(x) \\ &\text{при } a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

Сравнивая (236) с (232) и (234), найдём, что функция $\Phi(z)$, определённая соотношением (235), будет удовлетворять условиям (232) и (234), если положить

$$q(x) = \frac{(-1)^{n-m}}{\pi} \sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)} |f'(x), \quad (237)$$

$$a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Подставляя (237) в (235), найдём:

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n-m}}{\pi} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \frac{f'(t) dt}{t-z} + P_{n-1}(z) \right. \quad (238)$$

Подставляя (221) и (238) в (230), найдём:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \frac{f'(t) dt}{t-z} + P_{n-1}(z) \right.}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}}. \quad (239)$$

Итак, функция $F(z)$, определённая соотношением (239), удовлетворяет условиям (215) и (216).

Находим далее

$$F(z) = \frac{1}{z^n} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{a_m}{2z} + \frac{3a_m^2}{8z^2} + \dots \right) \left(1 + \frac{b_m}{2z} + \frac{3b_m^2}{8z^2} + \dots \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \dots + c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} \right) =$$

$$= \frac{c_{n-1}}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots \quad (240)$$

Итак, при условии (228) функция $F(z)$, определённая соотношением (239), будет удовлетворять и условию (218) в окрестности бесконечно удалённой точки.

Из (225) находим:

$$\frac{1}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} = \frac{F_0(z)}{P_{n-1}(z)} = \frac{(-1)^{n-l+1} t}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} \quad (241)$$

при $a_l < x < b_l \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad y = +0.$

Из (239) согласно (241) находим:

$$\operatorname{Im} F(z) = \frac{(-1)^{n-l+1}}{\sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \times \right. \\ \left. \times \lim_{\nu \rightarrow +0} \operatorname{Re} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \left| \frac{f'(t) dt}{t-z} + P_{n-1}(x) \right] \quad (242)$$

при $a_l < x < b_l$ ($l = 1, 2, \dots, n$), $y = +0$.

Но, как мы уже знаем из § 3, если функция $f'(t)$ в точке $t = x$ ($a_l < x < b_l$) удовлетворяет условию Липшица, то

$$\lim_{\nu \rightarrow +0} \operatorname{Re} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \left| \frac{f'(t) dt}{t-z} \right. = \\ = \int_{a_m}^{b_m} \sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \left| \frac{f'(t) dt}{t-x} \right. \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (243)$$

причём при $m = l$ под интегралом, стоящим в правой части формулы (243), следует понимать его главное значение. Подставляя (243) в (242) и (242) в (219), найдём:

$$p(x) = \frac{(-1)^{n-l+1}}{\sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \times \\ \times \left[\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt[n]{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \left| \frac{f'(t) dt}{t-x} \right. + P_{n-1}(x) \right], \quad (244)$$

где

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-2} x^{n-2} - P x^{n-1}, \quad (245)$$

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt. \quad (246)$$

При $n = 1$, $a_1 = -a$, $b_1 = a$ формула (244) совпадает с формулой (163), ранее найденной нами для этого частного случая.

Формула (244) для искомой функции $p(x)$ найдена нами из соотношения (219). Функция $F(z)$, входящая в (219), удовлетворяет граничному условию (215):

$\operatorname{Re} F(z) = f'(x)$ при $y = +0$, $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), причём

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^n V_m(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt \quad (247)$$

при $y = +0$

согласно (213). Таким образом, найденная функция $p(x)$ будет удовлетворять соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f'(x), \quad (248)$$

$$a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Однако из соотношений (248) не следует ещё, что найденная функция $p(x)$ будет удовлетворять исходному уравнению (209). Интегрируя (248) по x , найдём:

$$\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x) + \alpha_m, \quad (249)$$

$$a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — постоянные, т. е. подставляя найденную функцию $p(x)$ в левую часть уравнения (209), мы получим функцию аргумента x , которая на каждом из интервалов $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) сможет отличаться от заданной функции $f(x)$ на некоторую постоянную α_m . Однако функция $p(x)$, определяемая формулой (244), содержит n произвольных постоянных c_0, c_1, \dots, c_{n-2} и P , являющихся коэффициентами полинома $P_{n-1}(x)$. Таким образом, добавочные постоянные слагаемые $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые мы получим в результате подстановки функции $p(x)$ из (244) в исходное уравнение (209), будут функциями постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, P$, при этом функциями линейными, так как эти постоянные входят линейно в выражение для функции $p(x)$. Приравнявая нулю эти добавочные постоянные слагаемые $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, мы получим n линейных

уравнений для определения постоянных c_0, c_1, \dots, c_{n-2} и P , входящих в найденное нами для функции $p(x)$ выражение (244). Определив таким образом постоянные c_0, c_1, \dots, c_{n-2} и P , мы получим решение исходного уравнения (209).

В контактной задаче теории упругости мы столкнёмся ниже со случаем, в котором функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения (209), задана лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого, общего для всех интервалов $a_m \leq x \leq b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), но зато непосредственно задана величина

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt.$$

В этом случае для решения задачи достаточно выразить постоянные c_0, c_1, \dots, c_{n-2} , входящие в формулу (244), через заданную величину P . Ниже мы выписываем уравнения, которые в данном случае определяют постоянные c_0, c_1, \dots, c_{n-2} . Из (247) находим:

$$\begin{aligned} & \int_{b_m}^{a_{m+1}} [\operatorname{Re} F(z)]_{y=+0} dx = \\ & = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t - a_{m+1}|} dt - \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t - b_m|} dt = \\ & = f(a_{m+1}) - f(b_m), \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (250)$$

согласно (209). Если функция $f(x)$ задана с точностью до постоянного слагаемого, общего для всех интервалов $a_m \leq x \leq b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), разности, стоящие в правых частях соотношений (250), будут вполне определёнными.

В соответствии с соотношениями (226) из (239) находим:

$$\begin{aligned} & [\operatorname{Re} F(z)]_{y=+0} = \\ & = (-1)^{n-m} \frac{\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t - a_m)(t - b_m) \right|} \frac{f'(t) dt}{t-x} + P_{n-1}(x)}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x - a_m)(x - b_m) \right|}} \end{aligned} \quad (251)$$

при $b_m < x < a_{m+1}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$).

Подставляя (251) в (250) и принимая во внимание обозначение (245):

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-2}x^{n-2} - Px^{n-1},$$

получим $n-1$ уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-2} c_l \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{x^l dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} = \\ = (-1)^{n-m} [f(a_{m+1}) - f(b_m)] + P \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{1}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \frac{f'(t) dt}{t-x} \right] dx, \quad (252) \\ m = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

для определения коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_{n-2} .

В контактной задаче теории упругости мы столкнёмся также со случаем, в котором функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения (209), задана в каждом из интервалов $a_m \leq x \leq b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) лишь с точностью до своей для каждого интервала произвольной аддитивной постоянной, но зато задано n величин P_1, P_2, \dots, P_n :

$$P_m = \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (253)$$

В этом случае

$$P = \sum_{m=1}^n P_m, \quad (254)$$

и коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_{n-2} мы найдём согласно (244) из уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-2} c_l \int_{a_m}^{b_m} \frac{x^l dx}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} = \\ = (-1)^{n-m+1} \pi P_m + P \int_{a_m}^{b_m} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{b_m} \frac{1}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} (t-x)} \right] dx, \quad (255) \\ m = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

которые получаются непосредственной подстановкой функции $p(x)$ из (244) в первые $n-1$ из соотношений (253).

В заключение этого параграфа рассмотрим примеры.

1) $n=2$, $a_1=-b$, $b_1=-a$, $a_2=a$, $b_2=b$, $f(x)=\alpha$ при $-b < x < -a$, $f(x)=\alpha+\varepsilon$ при $a < x < b$, α — произвольная постоянная.

В этом случае формула (244) принимает вид:

$$p(x) = \frac{\pm(c_0 - Px)}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad a < |x| < b, \quad (256)$$

причём знак плюс следует брать при $x < 0$, знак минус при $x > 0$. Уравнения (252) для $m=1$ дают:

$$c_0 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = -\varepsilon + P \int_{-a}^a \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}}. \quad (257)$$

Полагая $x=at$ и обозначая через k отношение $\frac{a}{b}$, найдём:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} &= \frac{1}{b} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{2}{b} K(k), \quad (258) \end{aligned}$$

где

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (259)$$

— так называемый полный эллиптический интеграл первого рода, для вычисления которого имеются таблицы.

Далее,

$$\int_{-a}^a \frac{x dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = 0, \quad (260)$$

так как в этом определённом интеграле подинтегральная функция нечётная.

Подставляя (258) и (260) в (257), найдём:

$$c_0 = -\frac{b\varepsilon}{2K(k)}, \quad k = \frac{a}{b}. \quad (261)$$

Формулы (256) и (261) дают решение задачи.

2) $n=2$, $a_1 = -b$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = b$, $f(x) = \alpha_1$ при $-b < x < -a$, $f(x) = \alpha_2$ при $a < x < b$, α_1 и α_2 — произвольные постоянные,

$$\int_{-b}^{-a} p(t) dt = P_1, \quad \int_a^b p(t) dt = P_2.$$

В этом случае для $p(x)$ сохраняется формула (256), но постоянная c_0 будет определяться на этот раз первым из уравнений (255), которое даёт:

$$c_0 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = -\pi P_2 + P \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}. \quad (262)$$

Полагая $x = \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)t^2}$ и обозначая через k величину $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$, найдём:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{b} K(k). \quad (263)$$

Полагая $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \sin \varphi}$, найдём:

$$\int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (264)$$

Подставляя (263) и (264) в (262), получим:

$$c_0 \frac{K(k)}{b} = -\pi P_2 + \frac{\pi}{2} P = \frac{\pi}{2} (P_1 - P_2),$$

так как

$$P = P_1 + P_2. \quad (265)$$

Таким образом,

$$c_0 = \frac{\pi b}{2K(k)}(P_1 - P_2), \quad k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}. \quad (266)$$

Подставляя (265) и (266) в (256), окончательно найдём:

$$p(x) = \pm \frac{\pi b}{2K(k)} \frac{(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)x}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad (267)$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad a < |x| < b,$$

где знак плюс берётся при $x < 0$, знак минус при $x > 0$.

§ 5. Уравнение периодической контактной задачи

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = f(\vartheta), \quad \alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (268)$$

$$(m = 1, 2, \dots, n),$$

где $f(\vartheta)$ — функция, заданная в n интервалах аргумента ϑ $\alpha_m < \vartheta < \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), а $p(\vartheta)$ — неизвестная функция, подлежащая определению в этих n интервалах аргумента¹⁾. Будем в дальнейшем предполагать, что

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n < 2\pi. \quad (269)$$

Рассмотрим внутри окружности единичного радиуса $\xi^2 + \eta^2 = 1$ функцию двух переменных ξ, η :

$$V(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \ln \frac{1}{R} d\varphi,$$

где R — расстояние между точкой Q с координатами ξ, η и точкой Q' на окружности единичного радиуса с полярным углом φ (рис. 2):

$$R = \sqrt{(\xi - \cos \varphi)^2 + (\eta - \sin \varphi)^2}.$$

Функция $V(\xi, \eta)$ представляет собой логарифмический потенциал простого слоя с плотностью p , расположенного на

¹⁾ Келдыш М. В. и Седов Л. И., Эффективное решение некоторых крайних задач для гармонических функций. Доклады АН СССР, т. XVI, № 1, 1937.

дугах $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ единичной окружности. Так же, как и в § 1, непосредственным дифференцированием легко убедимся в том, что функция $V(\xi, \eta)$ внутри окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0$, т. е. является гармонической функцией переменных ξ, η . Переходя к полярным координатам ρ, ϑ , т. е. полагая $\xi = \rho \cos \vartheta, \eta = \rho \sin \vartheta$, найдём:

$$V = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}} d\varphi. \quad (270)$$

Полагая в (270) $\rho = 1$ и принимая во внимание тождество

$$2 - 2 \cos(\varphi - \vartheta) = \left(2 \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}\right)^2,$$

найдём:

$$V = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi \quad \text{при } \rho = 1. \quad (271)$$

Сравнивая (271) и (268), придём к тому выводу, что уравнение (268) эквивалентно условию

$$V = f(\vartheta) \quad \text{при } \rho = 1, \quad \alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (272)$$

налагаемому на гармоническую функцию V .

Выполняя в (270) дифференцирование по ρ , найдём:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \frac{\cos(\varphi - \vartheta) - \rho}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} d\varphi. \quad (273)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\cos(\varphi - \vartheta) - \rho}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} - 1 \right],$$

сможем придать формуле (273) вид:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\pi}{\rho} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} d\varphi - \frac{P}{2\pi} \right], \quad (274)$$

где

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) d\varphi. \quad (275)$$

Но выражение $\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} d\varphi$ представляет

собой интеграл Пуассона

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos(\varphi-\vartheta)+\rho^2} d\varphi,$$

в котором $F(\varphi) = p(\varphi)$ при $\alpha_m < \varphi < \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и $F(\varphi) = 0$ при $\beta_m < \varphi < \alpha_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) ($\beta_0 = 0, \alpha_{n+1} = 2\pi$), и стремится к $p(\vartheta)$ при $\alpha_m < \vartheta < \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и к 0 при $\beta_m < \vartheta < \alpha_{m+1}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), когда ρ стремится к единице. Таким образом, из (274) следует:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \pi p(\vartheta) - \frac{P}{2} \quad \text{при } \rho = 1, \alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (276)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{P}{2} \quad \text{при } \rho = 1, \beta_m < \vartheta < \alpha_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (277)$$

Итак, построив функцию V , гармоническую внутри окружности $\rho = 1$ и удовлетворяющую на этой окружности граничным условиям (272) и (277), мы найдём из (276) искомую функцию $p(\varphi)$.

Решение уравнения (268) эквивалентно, таким образом, построению функции, гармонической внутри окружности по смешанным граничным условиям, заданным на этой окружности. Как и в предыдущих главах, приведём эту краевую задачу к задаче построения функции

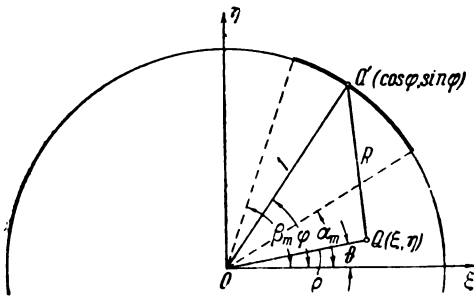


Рис. 2.

комплексного переменного по заданным для неё граничным условиям. Рассмотрим функцию комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\Phi(\zeta) = i \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) \frac{\zeta}{e^{i\varphi} - \zeta} d\varphi. \quad (278)$$

Здесь под знаком интеграла $\zeta = \xi + i\eta = \rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta$ — комплексное число, изображаемое на рис. 2 точкой Q , $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ — комплексное число, изображаемое на том же рисунке точкой Q' . Находим:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{e^{i\varphi} - \zeta} &= \frac{\rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta}{\cos \varphi + i \sin \varphi - \rho \cos \vartheta - i\rho \sin \vartheta} = \\ &= \frac{(\rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta) [\cos \varphi - \rho \cos \vartheta - i(\sin \varphi - \rho \sin \vartheta)]}{[\cos \varphi - \rho \cos \vartheta + i(\sin \varphi - \rho \sin \vartheta)] [\cos \varphi - \rho \cos \vartheta - i(\sin \varphi - \rho \sin \vartheta)]} = \\ &= \frac{\rho \cos(\varphi - \vartheta) - \rho^2 - i\rho \sin(\varphi - \vartheta)}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}. \end{aligned} \quad (279)$$

Подставляя (279) в (278), найдём:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\rho(\varphi) \rho \sin(\varphi - \vartheta) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} + i\rho \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\rho(\varphi) [\cos(\varphi - \vartheta) - \rho]}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2} d\varphi. \quad (280)$$

Дифференцированием по ϑ из (270) находим:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\rho(\varphi) \rho \sin(\varphi - \vartheta) d\varphi}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}. \quad (281)$$

Согласно (281) и (273) формуле (280) можно придать вид:

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + i\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}. \quad (282)$$

Таким образом, действительная и мнимая части введённой нами функции комплексного переменного $\Phi(\zeta)$ связаны с гармонической функцией V соотношениями

$$\operatorname{Re} \Phi(\zeta) = \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \quad \operatorname{Im} \Phi(\zeta) = \rho \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad (283)$$

и условиям (272), (277) и (276), которым удовлетворяет функция V на единичной окружности $\rho = 1$, соответствуют условия:

$$\operatorname{Re} \Phi(\zeta) = f'(\vartheta) \quad \text{при } \rho = 1, \alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (284)$$

$$\operatorname{Im} \Phi(\zeta) = -\frac{P}{2} \quad \text{при } \rho = 1, \beta_m < \vartheta < \alpha_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (285)$$

$$\operatorname{Im} \Phi(\zeta) = \pi\rho(\vartheta) - \frac{P}{2} \quad \text{при } \rho = 1, \alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (286)$$

которым будет удовлетворять на единичной окружности функция комплексного переменного $\Phi(\zeta)$. Итак, построив функцию $\Phi(\zeta)$, удовлетворяющую условиям (284) и (285), мы из (286) найдём искомую функцию $\rho(\vartheta)$.

Путём последовательных преобразований находим:

$$\begin{aligned} \frac{i\zeta}{e^{i\vartheta} - \zeta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{ie^{i\vartheta} + i\zeta}{e^{i\vartheta} - \zeta} - i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{ie^{i\frac{\vartheta}{2}} + ie^{-i\frac{\vartheta}{2}}\zeta}{e^{i\frac{\vartheta}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta}{2}}\zeta} - i \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{i \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) + i \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \zeta}{\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} - \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \zeta} - i \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{\vartheta}{2} (\zeta - 1) + i \cos \frac{\vartheta}{2} (1 + \zeta)}{\cos \frac{\vartheta}{2} (1 - \zeta) + i \sin \frac{\vartheta}{2} (1 + \zeta)} - i \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - i \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}}{-\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}} - i \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2}}{-\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}} + \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - i \right). \end{aligned} \quad (287)$$

Подставляя (287) в (278), получим:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{p(\varphi) \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}} + \gamma - i \frac{P}{2}, \quad (288)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad (289)$$

а P определяется соотношением (275). Полагая далее в (288)

$$-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = t, \quad (290)$$

получаем:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{p^*(t) dt}{t - i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}} + \gamma - i \frac{P}{2}, \quad (291)$$

где

$$a_m = -\operatorname{ctg} \frac{a_m}{2}, \quad b_m = -\operatorname{ctg} \frac{b_m}{2} \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (292)$$

$$p^*(t) = p(-2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} t). \quad (293)$$

Согласно (269)

$$-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < \infty. \quad (294)$$

Вводя обозначение

$$z = i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad (295)$$

придаём формуле (291) вид:

$$\Phi(\zeta) = F(z) + \gamma - i \frac{P}{2}, \quad (296)$$

где

$$F(z) = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{p^*(t) dt}{t - z}. \quad (297)$$

Формула (295) определяет комплексное число z , действительная и мнимая части которого меняются при изменении действительной и мнимой частей комплексного числа ζ . Обозначая через x и y действительную и мнимую части комплексного числа z и полагая в (295) $\zeta = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta$, найдём:

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{i(1 + \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta)}{1 - \rho \cos \vartheta - i \rho \sin \vartheta} = \\ &= \frac{[-\rho \sin \vartheta + i(1 + \rho \cos \vartheta)](1 - \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta)}{(1 - \rho \cos \vartheta)^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{-2\rho \sin \vartheta + i(1 - \rho^2)}{1 - 2\rho \cos \vartheta + \rho^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$x = \frac{-2\rho \sin \vartheta}{1 - 2\rho \cos \vartheta + \rho^2}, \quad y = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \vartheta + \rho^2}. \quad (298)$$

Из (298) видно, что $y > 0$ при $\rho < 1$ и $y = 0$ при $\rho = 1$, т. е. точка P с координатами x, y , изображающая комплексное число $z = x + iy$, находится в верхней полуплоскости xOy , когда точка Q с полярными координатами ρ, ϑ , изображающая комплексное число $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, находится внутри единичной окружности $\rho = 1$ (рис. 3) и точка P выходит на ось Ox , когда точка Q попадает на окружность $\rho = 1$. При $\rho = 1$ формула (298) даёт:

$$x = -\frac{\sin \vartheta}{1 - \cos \vartheta} = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (299)$$

Соотношение (299) показывает, что когда точка Q описывает окружность $\rho = 1$, точка P пробегает ось Ox , причём x меняется от $-\infty$ до $+\infty$, когда ϑ меняется от 0 до 2π .

Из (296) находим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= \operatorname{Re} \Phi(\zeta) - \gamma, \\ \operatorname{Im} F(z) &= \operatorname{Im} \Phi(\zeta) + \frac{P}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Из (300) следует, что условиям (284) и (285) для функции $\Phi_1(\zeta)$ соответствуют условия

$$[\operatorname{Re} F(z)]_{y=+0} = f'(\vartheta) - \gamma \quad \text{при } \alpha_m \leq \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

$$[\operatorname{Im} F(z)]_{y=+0} = 0 \quad \text{при } \beta_m < \vartheta < \alpha_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n)$$

для функции $F(z)$, которым согласно (299) и (292) можно придать вид:

$$\operatorname{Re} F(z) = f'(-2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) - \gamma \quad (301)$$

$$\text{при } y = +0, a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

$$\operatorname{Im} F(z) = 0 \quad (302)$$

$$\text{при } y = +0, b_m < x < a_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$(b_0 = -\infty, a_{n+1} = \infty).$$

Из (300) и (286) следует:

$$\operatorname{Im} F(z) = \pi p(-2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \pi p^*(x) \quad \text{при } y = +0, a_m < x < b_m \quad (303)$$

$$(m = 1, 2, \dots, n),$$

если воспользоваться обозначением (293).

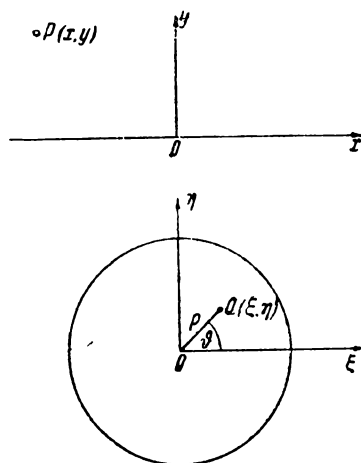


Рис. 3.

Соотношения (302) и (303) непосредственно вытекают также из формул (216) и (217), если сравнить (297) с (210) и (211).

Как мы показали в § 4, функция $F(z)$, определяемая формулой (239), удовлетворяет условиям (215) и (216). Таким образом, функция

$$F_1(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t)}{t-z} dt + P_{n-1}(z) \right.}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} \quad (304)$$

будет удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F_1(z) &= f'(-2 \operatorname{arctg} x) \\ &\text{при } y = +0, a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \\ \operatorname{Im} F_1(z) &= 0 \\ &\text{при } y = +0, b_m < x < a_{m+1} \quad (m=0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

Будем искать функцию $F(z)$ в виде суммы

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z). \quad (306)$$

Тогда согласно (301), (302) и (305) функция $F_2(z)$ должна удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F_2(z) &= -\gamma \text{ при } y = +0, a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \\ \operatorname{Im} F_2(z) &= 0 \text{ при } y = +0, b_m < x < a_{m+1} \quad (m=0, 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (307)$$

Кроме того, как видно из (297) и (304), $F(\infty) = F_1(\infty) = 0$. Следовательно, функция $F(z)$ должна также удовлетворять и условию

$$F_2(\infty) = 0. \quad (308)$$

Рассмотрим функцию

$$\sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}}.$$

Согласно (224)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} &= \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{x-b_m}{x-a_m} \right|} \\ \text{при } y = +0, b_m < x < a_{m+1} \quad (m=0, 1, \dots, n), \\ \sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} &= i \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{x-b_m}{x-a_m} \right|} \\ \text{при } y = +0, a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

и

$$\sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} \rightarrow +1, \text{ когда } z \rightarrow \infty. \tag{310}$$

Согласно соотношениям (309) и (310) функция

$$F_2(z) = \gamma \left[\sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} - 1 \right] \tag{311}$$

удовлетворяет как условиям (307), так и условию (308).

Подставляя (304) и (311) в (306), найдём:

$$F(z) = \frac{\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t)}{t-z} dt + P_n^*(z) \right.}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} - \gamma, \tag{312}$$

где $P_n^*(z)$ — полином от z степени n :

$$P_n^*(z) = c_0^* + c_1^* z + c_2^* z^2 + \dots + c_{n-1}^* z^{n-1} + \gamma z^n. \tag{313}$$

Пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= \frac{1}{t-z} \left[\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{t-b_m} + 1 - \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{t-z}{t-b_m} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{t-z} \prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{t-b_m} + \varphi_0(t) + \varphi_1(t) z + \dots + \varphi_{n-1}(t) z^{n-1}, \end{aligned}$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ — функции аргумента t , явное выражение которых мы не выписываем, можно формуле (312) придать вид:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} \times \\ &\times \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{t-b_m} \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t)}{t-z} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{P_n^{**}(z)}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} - \gamma, \right. \end{aligned}$$

ИЛИ

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{t-a_m}{t-b_m} \right| \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t)}{t-z}} dt +$$

$$+ \frac{P_n^{**}(z)}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} - \gamma, \quad (314)$$

ТАК КАК

$$\prod_{m=1}^n (t-b_m) = (-1)^{n-m+1} \left| \prod_{m=1}^n (t-b_m) \right|$$

при $a_m < t < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$.

Здесь $P_n^{**}(z)$ — полином от z степени n , коэффициенты которого, за исключением последнего, отличны от коэффициентов полинома $P_n^*(z)$.

Пользуясь, далее, тождеством

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1+tz}{(1+t^2)(t-z)} + \frac{t}{1+t^2},$$

придадим формуле (314) окончательный вид:

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\prod_{m=1}^n \frac{z-b_m}{z-a_m}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{t-a_m}{t-b_m} \right| \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t)(1+tz)}{(1+t^2)(t-z)}} dt +$$

$$+ \frac{P_n(z)}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (z-a_m)(z-b_m)}} - \gamma, \quad (315)$$

где

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \quad (316)$$

— полином с некоторыми новыми коэффициентами c_0, c_1, \dots, c_n . Подставляя (315) в (303), найдём в соответствии с (309) и (224):

$$p(-2 \operatorname{arctg} x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{x-b_m}{x-a_m} \right|} \times \\ \times \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{t-a_m}{t-b_m} \right|} \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t) (1+tx)}{(1+t^2)(t-x)} dt + \\ + \frac{(-1)^{n-m+1} P_n(x)}{\pi \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \quad (317)$$

при $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$).

Подставляя в (317) a_m и b_m из (292) и полагая в (317)

$$t = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, \quad x = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

получим:

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\theta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\theta - \alpha_m}{2}} \right|} \times \\ \times \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi + \\ + \frac{(-1)^{n-m+1} \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\alpha_m}{2} \sin \frac{\beta_m}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^n} P_n\left(-\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\right)}{\pi \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\theta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\theta - \beta_m}{2} \right|}},$$

так как

$$-\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_m}{2} = \frac{\sin \frac{\theta - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\alpha_m}{2} \sin \frac{\theta}{2}}, \\ -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta_m}{2} = \frac{\sin \frac{\theta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\beta_m}{2} \sin \frac{\theta}{2}}, \quad \frac{1 + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{\theta},$$

или окончательно

$$\begin{aligned}
 p(\vartheta) = & -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right|} \times \\
 & \times \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi + \\
 & + (-1)^{n-m+1} \frac{\sum_{m=0}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} \quad (318)
 \end{aligned}$$

при $\alpha_m < \vartheta < \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$),

где

$$\gamma_m = \frac{1}{\pi} (-1)^m \sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\alpha_m}{2} \sin \frac{\beta_m}{2}} c_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (319)$$

Перейдём теперь к определению коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, входящих в формулу (318) для искомой функции $p(\vartheta)$. Из (278) видно, что $\Phi(0) = 0$. Далее из (295) следует: $z = i$ при $\zeta = 0$. На основании этого формула (296) даёт:

$$F(i) + \gamma = i \frac{P}{2}. \quad (320)$$

Подставляя (292) в (315), полагая в (315) $t = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$; $z = i$ и принимая во внимание тождества:

$$i + \operatorname{ctg} \frac{\alpha_m}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha_m}{2} + i \sin \frac{\alpha_m}{2}}{\sin \frac{\alpha_m}{2}} = \frac{e^{i \frac{\alpha_m}{2}}}{\sin \frac{\alpha_m}{2}}, \quad i + \operatorname{ctg} \frac{\beta_m}{2} = \frac{e^{i \frac{\beta_m}{2}}}{\sin \frac{\beta_m}{2}},$$

$$\frac{1 - i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - i} = \frac{\left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \left(-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + i\right)}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} + 1} = i,$$

найдем:

$$F(i) = -\frac{i}{2\pi} e^{-\frac{i}{4} \sum_{m=1}^n (\beta_m - \alpha_m)} \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) d\varphi +$$

$$+ \frac{\sqrt{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\alpha_m}{2} \sin \frac{\beta_m}{2} \sum_{m=0}^n c_m i^m}}{e^{\frac{i}{4} \sum_{m=1}^n (\alpha_m + \beta_m)}} - \gamma. \quad (324)$$

Подставляя (324) в (320) и принимая во внимание (319), получим уравнение

$$\pi \sum_{m=0}^n (-i)^m \gamma_m = i \frac{P}{2} \left[\cos \frac{1}{4} \sum_{m=1}^n (\alpha_m + \beta_m) + i \sin \frac{1}{4} \sum_{m=1}^n (\alpha_m + \beta_m) \right] +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \left(\cos \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \beta_m + i \sin \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \beta_m \right) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) d\varphi,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_4 + \gamma_6 - \dots &= \frac{P}{2\pi} \sin \frac{1}{4} \sum_{m=1}^n (\alpha_m + \beta_m) + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \left(\sin \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \beta_m \right) \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) d\varphi, \\ -\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_5 + \gamma_7 - \dots &= \frac{P}{2\pi} \cos \frac{1}{4} \sum_{m=1}^n (\alpha_m + \beta_m) + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \left(\cos \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \beta_m \right) \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

Далее из (283) и (272) следует:

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]_{\rho=1} d\vartheta = (V)_{\rho=1}^{\vartheta=\alpha_{k+1}} - (V)_{\rho=1}^{\vartheta=\beta_k} = f(\alpha_{k+1}) - f(\beta_k), \quad (323)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Если функция $f(\vartheta)$ задана с точностью до произвольного постоянного слагаемого, общего для всех интервалов (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , ..., (α_n, β_n) , правые части уравнений (323) будут иметь вполне определённые значения. Из (296) находим:

$$[\operatorname{Re} F(\zeta)]_{\rho=1} = [\operatorname{Re} F(z)]_{y=+0} + \gamma. \quad (324)$$

Подставляя (315) в (324), найдём в соответствии с (309) и (224):

$$[\operatorname{Re} F(\zeta)]_{\rho=1} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{x-b_m}{x-a_m} \right|} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{t-a_m}{t-b_m} \right|} \frac{f'(-2 \operatorname{arctg} t) (1+tx)}{(1+t^2)(t-x)} dt +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-k} P_n(x)}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \quad (325)$$

при $b_k < x < a_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

Подставляя (292) в (325), полагая в (325) $t = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$, $x = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$ и принимая во внимание (319), найдём:

$$[\operatorname{Re} F(\zeta)]_{\rho=1} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right|} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{t - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{t - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi +$$

$$+ \frac{\pi (-1)^{n-k} \sum_{m=1}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} \quad (326)$$

при $\beta_k < \vartheta < \alpha_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

Подставляя (326) в (323), получим уравнения:

$$\sum_{m=0}^n \gamma_m \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{\sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} =$$

$$= (-1)^{n-k} \left[\frac{f(\alpha_{k+1}) - f(\beta_k)}{\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right|} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi \right) d\vartheta \right] \quad (327)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1),$$

которые совместно с уравнениями (322) образуют систему из $n+1$ уравнения для определения $n+1$ коэффициента $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Если функция $f(\vartheta)$ задана лишь с точностью до произвольного слагаемого, своего для каждого из интервалов $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$, но зато заданы все n величин

$$P_k = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} p(\vartheta) d\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (328)$$

а не только их сумма P , то, подставляя (318) в (328), получим уравнения

$$\sum_{m=0}^n \gamma_m \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} =$$

$$= (-1)^{n-k+1} \left[P_k + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right|} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi \right) d\vartheta \right] \quad (329)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1),$$

которые вместе с уравнениями (322) образуют для этого случая систему из $n+1$ уравнения для определения $n+1$ коэффициента $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$.

После того как вычислены коэффициенты $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, формула (318) даёт решение исходного уравнения (268).

В том частном случае, когда $n=1$, $\alpha_1=\pi-\alpha$, $\beta_1=\pi+\alpha$, формулы (318) и (322) принимают вид:

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{-\frac{\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2}}{\cos \frac{\vartheta+\alpha}{2}} \frac{\pi+\alpha}{\pi-\alpha}} \int \sqrt{-\frac{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} d\varphi - \frac{\gamma_0 \sin \frac{\vartheta}{2} + \gamma_1 \cos \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{-\cos \frac{\vartheta+\alpha}{2} \cos \frac{\vartheta-\alpha}{2}}}, \quad \pi-\alpha < \vartheta < \pi+\alpha, \quad (330)$$

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_0 &= \frac{P}{2\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{-\frac{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}} f'(\varphi) d\varphi, \\ -\gamma_1 &= -\frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{\alpha}{2} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{-\frac{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}} f'(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

так как при $\pi-\alpha < \vartheta < \pi+\alpha$, $\alpha < \pi$ имеем:

$$-\pi < \pi-2\alpha < \vartheta-\alpha < \pi, \quad \pi < \vartheta+\alpha < \pi+2\alpha < 3\pi,$$

и следовательно,

$$\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2} > 0, \quad \cos \frac{\vartheta+\alpha}{2} < 0. \quad (332)$$

Подставляя (331) в (330), получим формулу

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2 \sqrt{-\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2} \cos \frac{\vartheta+\alpha}{2}}} \left[\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{-\frac{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}} \times \right. \\ \left. \times f'(\varphi) \left(\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta-\alpha}{2} \right) d\varphi - \pi P \sin \frac{\vartheta}{2} \right],$$

или, если принять во внимание тождество

$$\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta-\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}{\sin \frac{\varphi-\vartheta}{2}},$$

получим:

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2 \sqrt{-\cos \frac{\vartheta-\alpha}{2} \cos \frac{\vartheta+\alpha}{2}}} \times \\ \times \left[\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\sqrt{-\cos \frac{\varphi-\alpha}{2} \cos \frac{\varphi+\alpha}{2}} f'(\varphi) d\varphi}{\sin \frac{\varphi-\vartheta}{2}} - \pi P \sin \frac{\vartheta}{2} \right], \quad (333)$$

$$\pi - \alpha < \vartheta < \pi + \alpha.$$

Полагая в (333) $\pi + \varphi$ вместо φ и $\pi + \vartheta$ вместо ϑ и принимая во внимание тождество

$$\sin \frac{\alpha-\vartheta}{2} \sin \frac{\alpha+\vartheta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \vartheta - \cos \alpha),$$

можно придать формуле (333) и несколько иной вид:

$$p(\pi + \vartheta) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \times \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha} f'(\pi + \varphi) d\varphi}{\sin \frac{\varphi-\vartheta}{2}} - \pi P \cos \frac{\vartheta}{2} \right], \quad (334)$$

$$-\alpha < \vartheta < \alpha.$$

В том предельном случае, когда $\alpha = \pi$, формула (333) даёт:

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} f'(\varphi) d\varphi}{\sin \frac{\varphi-\vartheta}{2}} - \pi P \sin \frac{\vartheta}{2} \right]. \quad (335)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi-\vartheta}{2}} = \sin \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2},$$

можно формуле (335) придать вид:

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} d\varphi - \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi^2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{P}{2\pi}. \quad (336)$$

В частности, если

$$f(2\pi) - f(0) = 0,$$

$$p(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} f'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\vartheta}{2} d\varphi + \frac{P}{2\pi},$$

или, согласно (109),

$$p(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \left[\overline{f'(\varphi)} + \frac{P}{2} \right], \quad (337)$$

где $\overline{f'(\varphi)}$ — функция, сопряжённая с функцией $f'(\varphi)$.

В заключение этого параграфа рассмотрим примеры.

1) $n = 1$, $\alpha_1 = \pi - \alpha$, $\beta_1 = \pi + \alpha$, $f(\varphi) = \text{const.}$ при $\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha$.

В этом случае формула (334) непосредственно даёт:

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{P \sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2\pi \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}}. \quad (338)$$

2) $n = 1$, $\alpha_1 = \pi - \alpha$, $\beta_1 = \pi + \alpha$, $f(\varphi) = -A \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \text{const.}$ при $\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha$.

В этом случае

$$f'(\pi + \varphi) = -\frac{A}{2} \sin \varphi \quad \text{при} \quad -\alpha < \varphi < \alpha. \quad (339)$$

Подставляя (339) в (334), найдём:

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \times \\ \times \left(\frac{A}{2\sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha} \sin \varphi d\varphi}{\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} + \pi P \cos \frac{\vartheta}{2} \right), \quad (340) \\ -\alpha < \vartheta < \alpha.$$

Полагая

$$\text{tg} \frac{\varphi}{2} = \text{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t,$$

найдем:

$$\frac{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}{\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} = \frac{\sqrt{2 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}} = \\ = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\alpha}{2} - \sec^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos \frac{\vartheta}{2} \left(\text{tg} \frac{\varphi}{2} - \text{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos t}{\cos \frac{\vartheta}{2} \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \text{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)}, \\ \sin \varphi d\varphi = \sin \varphi \frac{2 \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cos t}{\sec^2 \frac{\varphi}{2}} dt = \frac{4 \text{tg} \frac{\varphi}{2} \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cos t}{\sec^4 \frac{\varphi}{2}} dt = \\ = \frac{4 \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin t \cos t}{\left(1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t \right)^2} dt,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{п} \\
 p(\pi + \vartheta) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \times \\
 & \times \left[\frac{2A \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos^2 t dt}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t\right)^2} + \pi P \cos \frac{\vartheta}{2} \right].
 \end{aligned} \quad (341)$$

Подынтегральную функцию в (341) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin t \cos^2 t}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t\right)^2} = \\
 & = \frac{c_1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}} + \frac{c_2 + c_3 \sin t}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t} + \frac{c_4 + c_5 \sin t}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t\right)^2}, \quad (342)
 \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 не зависят от t и должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 - c_2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} - c_4 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= 0, \\
 c_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - c_3 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + c_4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - c_5 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= 1, \\
 2c_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - c_2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + c_3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + c_5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= 0, \\
 c_2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} - c_3 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= -1, \\
 c_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} + c_5 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

Подставляя (342) в (341), найдём:

$$\begin{aligned}
 p(\pi + \vartheta) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2 \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \times \\
 & \times \left[\frac{2A \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}} (c_1 J_1 + c_2 J_2 + c_3 J_3 + c_4 J_4 + c_5 J_5) + \pi P \cos \frac{\vartheta}{2} \right],
 \end{aligned} \quad (344)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}, & J_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t}, \\
 J_3 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t}, & J_4 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t\right)^2}, \\
 J_5 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Находим:

$$J_3 = J_5 = 0, \quad (345)$$

так как в этих определённых интегралах подинтегральные функции нечётные.

Полагая, далее,

$$\operatorname{tg} t = \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

найдем:

$$dt = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sec^2 \varphi \, d\varphi}{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 t = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1 + \sec^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{\sec^2 \varphi}{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$J_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \, d\varphi = \pi \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$J_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) d\varphi =$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos 2\varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos 2\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right). \quad (346)$$

Полагая

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \xi, \quad \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{x}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1 \quad \text{при} \quad -\alpha < \vartheta < \alpha),$$

найдем:

$$dt = \frac{2d\xi}{1+\xi^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin t - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\xi - x)(1 - \xi x)}{(1+\xi^2)(1+x^2)},$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} (1+x^2) \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(\xi-x)(1-\xi x)} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \frac{1+x^2}{1-x^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi-x} - \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi-\frac{1}{x}} \right), \quad (347) \\ &-1 < x < 1. \end{aligned}$$

Вычисляя главное значение определенного интеграла, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi-x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{d\xi}{\xi-x} + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{d\xi}{\xi-x} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(x-\xi)|_{-1}^{x-\varepsilon} + \ln(\xi-x)|_{x+\varepsilon}^1] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon(1-x)}{(1+x)\varepsilon} = \ln \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned} \quad (348)$$

Далее,

$$\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi-\frac{1}{x}} = \ln \left(\frac{1}{x} - \xi \right) \Big|_{-1}^1 = \ln \frac{1-x}{1+x}. \quad (349)$$

Подставляя (348) и (349) в (347), найдем:

$$J_1 = 0. \quad (350)$$

Подставляя (350), (346) и (345) в (344), найдем:

$$\begin{aligned} p(\pi + \vartheta) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \times \\ &\times \left\{ \frac{A \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}} \left[2c_2 + \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) c_4 \right] + P \cos \frac{\vartheta}{2} \right\}. \quad (351) \end{aligned}$$

Исключая из уравнений (361) c_1 , c_3 и c_5 , получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} c_2 \sec^2 \frac{\vartheta}{2} + c_4 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} &= -\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}, \\ -c_2 \sec^2 \frac{\vartheta}{2} + c_4 &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\begin{aligned} c_2 &= -\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \sec^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \\ c_4 &= \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned} \quad (352)$$

Подставляя (352) в (351), получим искомое решение

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2\pi \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}} \left[A \left(\cos \vartheta - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) + P \right], \quad (353)$$

$$-\alpha < \vartheta < \alpha.$$

Как видим, когда ϑ стремится к $-\alpha$ или к $+\alpha$, p стремится к бесконечности. Лишь в том частном случае, когда

$$P = A \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (354)$$

мы получаем согласно (353) решение

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{\sqrt{2} A}{2\pi} \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}, \quad (355)$$

ограниченное во всём интервале $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$.

§ 6. Уравнение контактной задачи при наличии трения между сжимаемыми телами

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_0^x p(t) dt + \nu \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad |x| < a, \quad (356)$$

где ν — некоторая постоянная.

Как и ранее, введём в рассмотрение логарифмический потенциал простого слоя

$$V(x, y) = \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{r} dt, \quad r = \sqrt{(t-x)^2 + y^2}. \quad (357)$$

Как мы уже знаем, функция $V(x, y)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y \rightarrow +0} = -\pi p(x) \quad \text{при } |x| < a, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y \rightarrow +0} = 0 \quad \text{при } |x| > a. \quad (358)$$

Уравнению (356) можно согласно (357) придать вид:

$$\int_0^x p(t) dt + vV(x, 0) = f(x), \quad |x| < a,$$

или, если продифференцировать это соотношение по x ,

$$p(x) + v \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y=0} = f'(x), \quad |x| < a. \quad (359)$$

Принимая во внимание (358), можем условию (359) придать вид:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \pi v \frac{\partial V}{\partial x} = -\pi f'(x) \quad \text{при } |x| < a, y = +0. \quad (360)$$

Рассмотрим в верхней полуплоскости $y > 0$ функцию комплексного переменного z :

$$F(z) = \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{i-z} = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (361)$$

Согласно (358) и (360) функция $F(z)$ будет удовлетворять граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \pi v \operatorname{Re} F(z) + \operatorname{Im} F(z) &= \pi f'(x) \quad \text{при } |x| < a, y = +0, \\ \operatorname{Im} F(z) &= 0 \quad \text{при } |x| > a, y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (362)$$

В окрестности бесконечно удалённой точки функция $F(z)$ будет иметь разложение

$$F(z) = -\frac{P}{z} + \dots, \quad P = \int_{-a}^a p(t) dt. \quad (363)$$

Зная функцию $F(z)$, мы найдём решение исходного уравнения (356) $p(x)$ по формуле

$$p(x) = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Im} F(z)]_{y=+0}, \quad |x| < a, \quad (364)$$

как это следует из (358) и (361).

Итак, решение уравнения (356) сводится к построению функции комплексного переменного $F(z)$ в верхней полуплоскости $y > 0$ по граничным условиям (36) и условию (363).

Будем искать функцию $F(z)$ в виде:

$$F(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} \Phi(z), \quad -\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}, \quad (365)$$

сводя, таким образом, отыскание функции $F(z)$ к отысканию функции $\Phi(z)$. Выведем условия, которым должна удовлетворять функция $\Phi(z)$. Разность $z-a$ можно представить в виде:

$$z-a = \rho e^{i\theta}, \quad (366)$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x-a} \quad (367)$$

(рис. 4). При этом будем считать, что ϑ меняется в пределах от 0 до π , когда точка z находится в верхней полуплоскости. Из (366) находим:

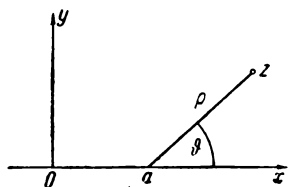


Рис. 4.

$$\begin{aligned} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= \rho^{-\frac{1}{2}+\gamma} e^{i\left(-\frac{1}{2}+\gamma\right)\vartheta} = \\ &= \rho^{-\frac{1}{2}+\gamma} \left[\cos\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta - \right. \\ &\quad \left. -i \sin\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\vartheta \right]. \end{aligned} \quad (368)$$

Как видно из соотношения (367),

$$\begin{aligned} \rho &= |x-a| \text{ при } y = +0, \quad \vartheta = 0 \text{ при } x > a, y = +0, \\ \vartheta &= \pi \text{ при } x < a, y = +0. \end{aligned} \quad (369)$$

Полагая в (368) $y = +0$, найдём на основании (369):

$$\left. \begin{aligned} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= |x-a|^{-\frac{1}{2}+\gamma} \text{ при } x > a, y = +0, \\ (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= |x-a|^{-\frac{1}{2}+\gamma} (\sin \pi\gamma - i \cos \pi\gamma) \\ &\text{при } x < a, y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

Меняя в (370) знак у a и γ , найдём:

$$\left. \begin{aligned} (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} &= |x+a|^{-\frac{1}{2}-\gamma} \text{ при } x > -a, y = +0, \\ (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} &= |x+a|^{-\frac{1}{2}-\gamma} (-\sin \pi\gamma - i \cos \pi\gamma) \\ &\text{при } x < -a, y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (371)$$

Из (370) и (371) находим:

$$\left. \begin{aligned} (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= (x+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (x-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} \\ &\text{при } x > a, y = +0, \\ (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= \\ &= (a+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (\sin \pi\gamma - i \cos \pi\gamma) \\ &\text{при } -a < x < a, y = +0, \\ (z+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (z-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} &= -(-a-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} \\ &\text{при } x < -a, y = +0. \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

Полагая в (365) $y = +0$, найдём согласно (372):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) + i \operatorname{Im} F(z) &= \\ &= (x+a)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (x-a)^{-\frac{1}{2}+\gamma} [\operatorname{Re} \Phi(z) + i \operatorname{Im} \Phi(z)] \\ &\quad \text{при } x > a, y = +0, \\ \operatorname{Re} F(z) + i \operatorname{Im} F(z) &= \\ &= (a+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (\sin \pi\gamma - i \cos \pi\gamma) \times \\ &\quad \times [\operatorname{Re} \Phi(z) + i \operatorname{Im} \Phi(z)] \quad \text{при } -a < x < a, y = +0, \\ \operatorname{Re} F(z) + i \operatorname{Im} F(z) &= \\ &= -(-a-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} [\operatorname{Re} \Phi(z) + i \operatorname{Im} \Phi(z)] \\ &\quad \text{при } x < -a, y = +0. \end{aligned} \right\} (373)$$

Первое и третье из соотношений (373) непосредственно дают:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= (x+a)^{\frac{1}{2}+\gamma} (x-a)^{\frac{1}{2}-\gamma} \operatorname{Im} F(z) \\ &\quad \text{при } x > a, y = +0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= -(-a-x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} \operatorname{Im} F(z) \\ &\quad \text{при } x < -a, y = +0. \end{aligned} \right\} (374)$$

Умножая обе части второго из соотношений (373) на $\sin \pi\gamma + i \cos \pi\gamma$, найдём:

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} [\cos \pi\gamma \operatorname{Re} F(z) + \sin \pi\gamma \operatorname{Im} F(z)] \quad (375)$$

при $-a < x < a, y = +0$.

Постоянная γ до сих пор оставалась у нас неопределённой. Положим теперь

$$\operatorname{tg} \pi\gamma = \frac{1}{\pi\nu}, \quad -\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}. \quad (376)$$

Пользуясь соотношением (376), можно условию (375) придать вид:

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = \frac{\cos \pi\gamma}{\pi\nu} (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} [\pi\nu \operatorname{Re} F(z) + \operatorname{Im} F(z)] \quad (377)$$

при $-a < x < a, y = +0$.

Подставляя (362) в (374) и (377), получим для функции $\Phi(z)$ граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z) &= \frac{\cos \pi\gamma}{\nu} (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(x) \\ &\quad \text{при } |x| < a, y = +0, \\ \operatorname{Im} \Phi(z) &= 0 \\ &\quad \text{при } |x| > a, y = +0. \end{aligned} \right\} (378)$$

Выясним далее поведение функции $\Phi(z)$ в окрестности бесконечно удалённой точки. Из (365) находим:

$$\Phi(z) = (z+a)^{\frac{1}{2}+\gamma} (z-a)^{\frac{1}{2}-\gamma} F(z) = z \left(1 + \frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}+\gamma} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} F(z). \quad (379)$$

Но, согласно (363), мы должны иметь:

$$[zF(z)]_{z=\infty} = -P. \quad (380)$$

Из (379) и (380) следует:

$$\Phi(\infty) = -P. \quad (381)$$

Будем искать функцию $\Phi(z)$ в виде:

$$\Phi(z) = \int_{-a}^a \frac{q(t) dt}{t-z} + c, \quad (382)$$

где c — действительная постоянная.

Как мы уже знаем,

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = \pi q(x) \quad \text{при } |x| < a, \quad y = +0, \quad (383)$$

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = 0 \quad \text{при } |x| > a, \quad y = +0$$

(см., например, формулы (361) и (358)).

Сравнивая (383) и (378), найдём, что граничные условия (378) будут удовлетворены, если положить:

$$q(x) = \frac{\cos \pi \gamma}{\pi} (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(x). \quad (384)$$

Далее, как видно из (381) и (382), условие (381) будет выполнено; если положить

$$c = -P. \quad (385)$$

Подставляя (384) и (385) в (382), найдём:

$$\Phi(z) = \frac{\cos \pi \gamma}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt}{t-z} - P. \quad (386)$$

Второе из соотношений (.73) даёт:

$$\operatorname{Im} F(z) = (a+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} [\sin \pi \gamma \operatorname{Im} \Phi(z) - \cos \pi \gamma \operatorname{Re} \Phi(z)] \quad \text{при } |x| < a, \quad y = +0. \quad (387)$$

Из (364) и (387) находим:

$$p(x) = \frac{\sin \pi \gamma [\operatorname{Im} \Phi(z)]_{y=+0} - \cos \pi \gamma [\operatorname{Re} \Phi(z)]_{y=+0}}{(a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}} \quad \text{при } |x| < a. \quad (388)$$

Подставляя (384) в (383), найдём:

$$[\operatorname{Im} \Phi(z)]_{\nu=+0} = \frac{\cos \pi \gamma}{\nu} (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(x) \text{ при } |x| < a. \quad (389)$$

Из (386) непосредственно следует:

$$[\operatorname{Re} \Phi(z)]_{\nu=+0} = \frac{\cos \pi \gamma}{\pi \nu} \int_{-a}^a \frac{(a+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt}{t-x} - P \text{ при } |x| < a. \quad (390)$$

Подставляя (389) и (390) в (388), найдём искомое решение уравнения (356):

$$p(x) = \frac{\sin \pi \gamma \cos \pi \gamma}{\pi \nu} f'(x) - \frac{\frac{\cos^2 \pi \gamma}{\pi \nu} \int_{-a}^a \frac{(a+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt}{t-x} - P \cos \pi \gamma}{\pi (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}}, \quad |x| < a, \quad (391)$$

где

$$P = \int_{-a}^a p(t) dt, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi \nu} \left(-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2} \right) \quad (392)$$

согласно (363) и (376).

§ 7. Уравнение задачи о сжатии упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями

Рассмотрим теперь уравнение ¹⁾, к которому приводит задача о сжатии двух упругих тел, ограниченных круговыми цилиндрическими поверхностями:

$$\lambda(x) g(x) + \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} = f(x), \quad -a < x < a, \quad (393)$$

где $\lambda(x)$ и $f(x)$ — заданные функции (будем предполагать ниже, что $\lambda(x) \neq 0$ при $-a < x < a$, $f(-x) = f(x)$), а $g(x)$ — функция, подлежащая определению. К уравнению (411) приводит также теория крыла конечного размаха, разработанная Прандтлем, вследствие чего это уравнение называют уравнением Прандтля. Мы приводим ниже решение этого уравнения для того случая, когда функция $\lambda(x)$ имеет вид:

$$\lambda(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (394)$$

¹⁾ Для численного решения уравнения (393) очень удобен метод конечных разностей — см. приложение II.

причём оба полинома, входящих в (394), не имеют вещественных корней в интервале $-a \leq x \leq a$.

В общем случае для заданной функции $\lambda(x)$ можно построить достаточно близкое приближённое выражение вида (394), взяв число n достаточно большим.

Мы придерживаемся ниже метода решения уравнения (393), предложенного И. Векуа¹⁾. Посредством этого метода решение уравнения (41) сводится к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка.

В § 2 мы показали, что уравнение

$$\int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad -a < x < a, \quad (395)$$

имеет решение:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} dt \right]$$

(см. формулу (115)), или, если воспользоваться тождеством

$$\frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t-x} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} - \frac{t+x}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \frac{1}{\pi} (a^2 - x^2) \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} \right].$$

Так как

$$\int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0,$$

если $f(x)$ — чётная функция.

Это решение будет ограниченным в точках $x = -a$ и $x = a$ тогда и только тогда, если

$$P = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

В этом случае решение уравнения (395) принимает вид:

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}, \quad -a < x < a. \quad (396)$$

¹⁾ См. И. Н. Векуа, Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. Прикладная математика и механика, т. 9, № 2, 1945.

То же решение, ограниченное в точках $x = -a$ и $x = a$, будет иметь и уравнение, которое мы получим, дифференцируя по x обе части уравнения (395). При $t > x$ находим:

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{|t-x|} = \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{t-x} = \frac{1}{t-x},$$

при $t < x$:

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{|t-x|} = \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{x-t} = \frac{1}{t-x}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{|t-x|} = \frac{1}{t-x}.$$

Дифференцируя по x обе части уравнения (395), получим уравнение

$$\int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t-x} = f'(x), \quad -a < x < a, \quad (397)$$

имеющее решение (396).

Представим теперь уравнение (393) в форме

$$\int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} = f(x) - \lambda(x) g(x), \quad -a < x < a \quad (398)$$

и будем временно рассматривать правую часть этого уравнения как известную функцию. Тогда, согласно формуле (396) для решения уравнения (397), мы сможем найти из (398) производную $g'(x)$, стоящую под знаком интеграла:

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f(t) - \lambda(t) g(t)}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} dt, \quad -a < x < a. \quad (399)$$

Подставляя (394) в (399), найдём:

$$g'(x) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{g(t) (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)}{(t-x) (b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n)} dt + F(x), \quad (400)$$

$$-a < x < a,$$

где

$$F(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)}. \quad (401)$$

Соотношение (400) можно представить в форме

$$\pi^2 \frac{g'(x) - F(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} + \int_{-a}^a g(t) R(t, x) dt, \quad (402)$$

где

$$R(t, x) = \frac{1}{t-x} \left[\frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n} - \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \right], \quad (403)$$

или

$$R(t, x) = \frac{P_0(t) + P_1(t)x + \dots + P_{n-1}(t)x^{n-1}}{(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)}, \quad (404)$$

где $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)$ — полиномы от t , коэффициенты которых нетрудно вычислить. Действительно, сравнивая (403) и (404), найдём:

$$\begin{aligned} (t-x)[P_0(t) + P_1(t)x + \dots + P_{n-1}(t)x^{n-1}] &= \\ &= (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) - \\ &\quad - (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n). \end{aligned} \quad (405)$$

Сравнивая слагаемые, содержащие одинаковые степени x в левой и в правой части соотношения (405), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} tP_0(t) &= b_0(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) - \\ &\quad - a_0(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n), \\ tP_1(t) - P_0(t) &= b_1(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) - \\ &\quad - a_1(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n), \\ &\dots \dots \dots \\ tP_{n-1}(t) - P_{n-2}(t) &= b_{n-1}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) - \\ &\quad - a_{n-1}(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n), \\ -P_{n-1}(t) &= b_n(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) - \\ &\quad - a_n(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n), \end{aligned} \right\} \quad (406)$$

определяющие полиномы $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)$. Из первых $n-1$ уравнений (406) последовательно найдём:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= b_0(a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1}) - \\ &\quad - a_0(b_1 + b_2 t + \dots + b_n t^{n-1}), \\ P_1(t) &= (b_0 + b_1 t)(a_2 + a_3 t + \dots + a_n t^{n-2}) - \\ &\quad - (a_0 + a_1 t)(b_2 + b_3 t + \dots + b_n t^{n-2}), \\ P_2(t) &= (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)(a_3 + a_4 t + \dots + a_n t^{n-3}) - \\ &\quad - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)(b_3 + b_4 t + \dots + b_n t^{n-3}), \\ &\dots \dots \dots \\ P_{n-1}(t) &= (b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-1} t^{n-1}) a_n - \\ &\quad - (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) b_n, \end{aligned} \right\} \quad (407)$$

последнее же из уравнений (406) является следствием остальных. Подставляя (404) в (402), найдём:

$$\pi^2 \frac{g'(x) - F(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}, \quad (408)$$

где

$$\alpha_k = \int_{-a}^a \frac{g(t) P_k(t) dt}{b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (409)$$

Соотношения (409) связывают неизвестные пока постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ с искомой функцией $g(x)$.

Представим (408) в форме:

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)[g'(x) - F(x)]}{(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)\sqrt{a^2 - x^2}} &= \\ &= \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}, \end{aligned}$$

или, согласно (394),

$$\pi^2 \frac{g'(x) - F(x)}{\lambda(x)} = \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} + R(x), \quad (410)$$

где $R(x)$ — рациональная функция:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}. \quad (411)$$

Интегрируя по частям, найдём:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} &= - \int_{-a}^a g(t) d \left(\ln \frac{1}{|t-x|} \right) = \\ &= \int_{-a}^a g'(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + g(a) \ln(a-x) - g(-a) \ln(a+x). \end{aligned} \quad (412)$$

Дифференцируя обе части полученного соотношения по x , будем иметь:

$$\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} = \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} - \frac{g(a)}{a-x} - \frac{g(-a)}{a+x}. \quad (413)$$

Подставляя (398) в (413), получим:

$$\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t-x} = f(x) - \lambda(x) g(x) - \frac{g(a)}{a-x} - \frac{g(-a)}{a+x}. \quad (414)$$

Дифференцируя по x обе части соотношения (410) и принимая во внимание (414), найдём:

$$\pi^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{g'(x) - F(x)}{\lambda(x)} \right] = f(x) - \lambda(x) g(x) + R'(x) - \frac{g(a)}{a-x} - \frac{g(-a)}{a+x}. \quad (415)$$

Итак, решение исходного уравнения (393) сведено нами к интегрированию дифференциального уравнения (415). Это дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах. Действительно, полагая

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \lambda(t) dt, \quad (416)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \pi \frac{d\mu}{dx}, & \pi \frac{g'(x)}{\lambda(x)} &= \frac{dg dx}{dx d\mu} = \frac{dg}{d\mu}, \\ \frac{\pi^2}{\lambda(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{g'(x)}{\lambda(x)} \right] &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{d\mu} \right) \frac{dx}{d\mu} = \frac{d^2g}{d\mu^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, поделив обе части уравнения (415) на $\lambda(x)$, получим уравнение

$$\frac{d^2g}{d\mu^2} + g = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \pi^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{F(x)}{\lambda(x)} \right] + f(x) + R'(x) - \frac{g(a)}{a-x} - \frac{g(-a)}{a+x} \right\},$$

или

$$\frac{d^2g}{d\mu^2} + g = \Phi(x), \quad (417)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \pi^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{F(x)}{\lambda(x)} \right] + f(x) + R'(x) - \frac{g(a)}{a-x} - \frac{g(-a)}{a+x} \right\}. \quad (418)$$

Следуя методу вариации произвольных постоянных, будем искать решение уравнения (417) в виде:

$$g = f_1(\mu) \cos \mu + f_2(\mu) \sin \mu, \quad (419)$$

подчинив неизвестные функции $f_1(\mu)$ и $f_2(\mu)$ условию

$$f_1'(\mu) \cos \mu + f_2'(\mu) \sin \mu = 0. \quad (420)$$

Дифференцируя (419) и принимая во внимание (420), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{d\mu} &= -f_1(\mu) \sin \mu + f_2(\mu) \cos \mu, \\ \frac{d^2g}{d\mu^2} &= -f_1'(\mu) \sin \mu + f_2'(\mu) \cos \mu - f_1(\mu) \cos \mu - f_2(\mu) \sin \mu. \end{aligned} \right\} \quad (421)$$

Подставляя (419) и (421) в (417), найдём:

$$-f'_1(\mu) \sin \mu + f'_2(\mu) \cos \mu = \Phi(x). \quad (422)$$

Из (420) и (422) найдём:

$$f'_1(\mu) = -\Phi(x) \sin \mu, \quad f'_2(\mu) = \Phi(x) \cos \mu. \quad (423)$$

Отсюда

$$f_1(\mu) = -\int_0^\mu \Phi(t) \sin \mu^* d\mu^* + c_1,$$

$$f_2(\mu) = \int_0^\mu \Phi(t) \cos \mu^* d\mu^* + c_2, \quad (424)$$

где переменные t и μ^* согласно (416) связаны соотношением

$$\mu^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \lambda(t) dt, \quad (425)$$

а c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (424) в (419), найдём:

$$g = \int_0^\mu \Phi(t) (\cos \mu^* \sin \mu - \sin \mu^* \cos \mu) d\mu^* + c_1 \cos \mu + c_2 \sin \mu,$$

или

$$g = \int_0^\mu \Phi(t) \sin(\mu - \mu^*) d\mu^* + c_1 \cos \mu + c_2 \sin \mu. \quad (426)$$

Переходя в (426) от переменной μ^* к переменной t , найдём в соответствии с соотношениями (416) и (425):

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \Phi(t) \sin[\mu(x) - \mu(t)] \lambda(t) dt + c_1 \cos \mu(x) + c_2 \sin \mu(x). \quad (427)$$

Подставляя (436) в (445), получим:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d}{dt} \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} + R(t) \right] \sin[\mu(x) - \mu(t)] dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[f(t) - \frac{g(a)}{a-t} - \frac{g(-a)}{a+t} \right] \sin[\mu(x) - \mu(t)] dt +$$

$$+ c_1 \cos \mu(x) + c_2 \sin \mu(x). \quad (428)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание (416), найдём:

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{d}{dt} \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} R(t) \right] \sin [\mu(x) - \mu(t)] dt = \\ & = - \int_0^x \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} + R(t) \right] \cos [\mu(x) - \mu(t)] \mu'(t) dt - \\ & - \left[\pi^2 \frac{F(0)}{\lambda(0)} + R(0) \right] \sin \mu(x) = - \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t) \right] \times \\ & \times \cos [\mu(x) - \mu(t)] dt - \left[\pi^2 \frac{F(0)}{\lambda(0)} + R(0) \right] \sin \mu(x). \quad (429) \end{aligned}$$

Подставляя (447) в (446) и включая константу $-\pi \frac{F(0)}{\lambda(0)} - \frac{1}{\pi} R(0)$ в произвольную постоянную c_2 , получим следующее окончательное выражение для искомой функции $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) = & - \frac{1}{\pi^2} \int_0^x \left[\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t) \right] \cos [\mu(x) - \mu(t)] dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[f(t) - \frac{g(a)}{a-t} - \frac{g(-a)}{a+t} \right] \sin [\mu(x) - \mu(t)] dt + \\ & + c_1 \cos \mu(x) + c_2 \sin \mu(x), \quad (430) \end{aligned}$$

где функции $F(x)$, $R(x)$ и $\mu(x)$ определяются формулами (401) (411) и (416).

Полагая в (430) $x = a$ и $x = -a$, получим уравнения для определения постоянных c_1 и c_2 , входящих в формулу (430):

$$\left. \begin{aligned} c_1 \cos \mu(a) + c_2 \sin \mu(a) &= g(a) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \left[\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t) \right] \times \\ & \times \cos [\mu(a) - \mu(t)] dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a \left[f(t) - \frac{g(a)}{a-t} - \frac{g(-a)}{a+t} \right] \times \\ & \times \sin [\mu(a) - \mu(t)] dt, \\ c_1 \cos \mu(-a) + c_2 \sin \mu(-a) &= g(-a) + \frac{1}{\pi^2} \times \\ & \times \int_0^{-a} \left[\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t) \right] \cos [\mu(-a) - \mu(t)] dt - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{-a} \left[f(t) - \frac{g(a)}{a-t} - \frac{g(-a)}{a+t} \right] \sin [\mu(-a) - \mu(t)] dt. \end{aligned} \right\} (431)$$

Подставляя (430) в (409), получим систему n линейных уравнений для определения постоянных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, входящих в выражение для $R(x)$.

Фигурирующие в формуле (430) граничные значения искомой функции $g(a)$ и $g(-a)$ определяются дополнительными условиями, вытекающими из постановки той или иной задачи, приводящей к уравнению (393).

Тем же приёмом, которым мы получили решение уравнения (393), можно получить и решение уравнения

$$\lambda(x)g'(x) + \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{t-x} = f(x), \quad -a < x < a, \quad (432)$$

если в этом уравнении $\lambda(x)$ имеет вид (394).

Представив уравнение (432) в форме

$$\int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{t-x} = f(x) - \lambda(x)g'(x), \quad -a < x < a \quad (433)$$

и временно рассматривая правую часть этого уравнения как известную функцию, найдём:

$$g(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f(t) - \lambda(t)g'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} dt, \quad -a < x < a, \quad (434)$$

в соответствии с формулой (396) для решения уравнения (397). Подставляя (394) в (434), найдём:

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{g'(t)(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)}{(t-x)(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n)} dt + F(x), \quad (435)$$

$$-a < x < a,$$

где

$$F(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f(t)dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}. \quad (436)$$

Соотношение (435) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{g(x) - F(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \int_{-a}^a \frac{g'(t)dt}{t-x} + \int_{-a}^a g'(t)R(t, x)dt, \quad (437) \end{aligned}$$

где $R(t, x)$ — функция, определяемая формулой (403) или экви-

валентной ей формулой (404). Подставляя (404) в (437), найдём:

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{g(x) - F(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \\ &= \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t - x} + \frac{\beta_0 + \beta_1x + \dots + \beta_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}, \end{aligned} \quad (438)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= \int_{-a}^a \frac{g'(t) P_k(t) dt}{b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n}, \quad (439) \\ k &= 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

а $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)$ — полиномы, определяемые формулами (407).

Дифференцируя обе части уравнения (433) по x , найдём в соответствии с формулой (413):

$$\int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t - x} = f'(x) - \frac{d}{dx} [\lambda(x) g'(x)] + \frac{g(a)}{a - x} + \frac{g(-a)}{a + x}. \quad (440)$$

Подставляя (440) в (438), найдём:

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n} \frac{g(x) - F(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \\ &= f'(x) - \frac{d}{dx} [\lambda(x) g'(x)] + \frac{g(a)}{a - x} + \frac{g(-a)}{a + x} + \\ &\quad + \frac{\beta_0 + \beta_1x + \dots + \beta_{n-1}x^{n-1}}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}, \end{aligned}$$

или, согласно (394),

$$\begin{aligned} \pi^2 \frac{g(x) - F(x)}{\lambda(x)} &= \\ &= f'(x) - \frac{d}{dx} [\lambda(x) g'(x)] + \frac{g(a)}{a - x} + \frac{g(-a)}{a + x} + S(x), \end{aligned} \quad (441)$$

где

$$S(x) = \frac{\beta_0 + \beta_1x + \dots + \beta_{n-1}x^{n-1}}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}. \quad (442)$$

Итак, решение уравнения (432) сведено нами к интегрированию дифференциального уравнения (441). Полагая

$$v(x) = \pi \int_0^x \frac{dt}{\lambda(t)}, \quad (443)$$

будем иметь:

$$\lambda(x) = \pi \frac{dx}{dv}, \quad \frac{1}{\pi} \lambda(x) g'(x) = \frac{dg}{dx} \frac{dx}{dv} = \frac{dg}{dv},$$

$$\frac{1}{\pi^2} \lambda(x) \frac{d}{dx} [\lambda(x) g'(x)] = \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dv} \right) \frac{dx}{dv} = \frac{d^2g}{dv^2}.$$

Таким образом, умножив обе части уравнения (441) на $\frac{1}{\pi^2} \lambda(x)$, получим уравнение

$$\frac{d^2g}{dv^2} + g = \frac{1}{\pi^2} \lambda(x) \left[f'(x) + S(x) + \frac{g(a)}{a-x} + \frac{g(-a)}{a+x} \right] + F(x),$$

или

$$\frac{d^2g}{dv^2} + g = \Psi(x), \tag{444}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi^2} \lambda(x) \left[f'(x) + S(x) + \frac{g(a)}{a-x} + \frac{g(-a)}{a+x} \right] + F(x). \tag{445}$$

Как мы показали уже выше, дифференциальное уравнение (417) имеет решение (427). Следовательно, решение дифференциального уравнения (444) будет иметь вид:

$$g = \int_0^v \Psi(t) \sin(v-v^*) dv^* + c_1 \cos v + c_2 \sin v, \tag{446}$$

где переменные t и v^* согласно (443) связаны соотношением

$$v^*(t) = \pi \int_0^t \frac{dt}{\lambda(t)}. \tag{447}$$

Переходя в (446) от переменной v^* к переменной t , найдём в соответствии с соотношениями (443) и (447):

$$g(x) = \pi \int_0^x \Psi(t) \sin[v(x) - v(t)] \frac{dt}{\lambda(t)} + c_1 \cos v(x) + c_2 \sin v(x). \tag{448}$$

Подставляя (463) в (466), получим окончательно:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} + f'(t) + S(t) + \frac{g(a)}{a-t} + \frac{g(-a)}{a+t} \right] \times$$

$$\times \sin[v(x) - v(t)] dt + c_1 \cos v(x) + c_2 \sin v(x), \tag{449}$$

где функции $F(x)$, $S(x)$ и $v(x)$ определяются формулами (446), (442) и (443).

Полагая в (449) $x = a$ и $x = -a$, получим два уравнения для определения постоянных c_1 и c_2 :

$$\left. \begin{aligned} c_1 \cos v(a) + c_2 \sin v(a) &= \\ &= g(a) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} + f'(t) + S(t) + \frac{g(a)}{a-t} + \frac{g(-a)}{a+t} \right] \times \\ &\quad \times \sin [v(a) - v(t)] dt, \\ c_1 \cos v(-a) + c_2 \sin v(-a) &= \\ &= g(-a) - \frac{1}{\pi} \int_0^{-a} \left[\pi^2 \frac{F(t)}{\lambda(t)} + f'(t) + S(t) + \frac{g(a)}{a-t} + \frac{g(-a)}{a+t} \right] \times \\ &\quad \times \sin [v(-a) - v(t)] dt. \end{aligned} \right\} (450)$$

Уравнениям (439) посредством интегрирования по частям можно придать вид:

$$\int_{-a}^a g(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{P_k(t)}{b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n} \right] dt = g(a) \frac{P_k(a)}{b_0 + b_1 a + \dots + b_n a^n} - \\ - g(-a) \frac{P_k(-a)}{b_0 - b_1 a + \dots + b_n (-a)^n} - \beta_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Подставляя (449) в (450), получим n уравнений для определения постоянных $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, входящих в выражение для рациональной функции $S(x)$.

Фигурирующие в формуле (449) граничные значения искомой функции $g(a)$ и $g(-a)$ определяются дополнительными условиями, вытекающими из постановки той или иной задачи, приводящей к уравнению (432).

ГЛАВА II

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Вывод основного уравнения плоской контактной задачи

Пусть два соприкасающихся упругих тела (*I* и *II* на рис. 5) перед сжатием ограничены в сечении по плоскости xOy кривыми

$$y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y = -f_2(x). \quad (1)$$

До сжатия между упругими телами будет просвет $f_1(x) + f_2(x)$. Касание тел будет иметь место для тех точек оси Ox , где

$$f_1(x) + f_2(x) = 0.$$

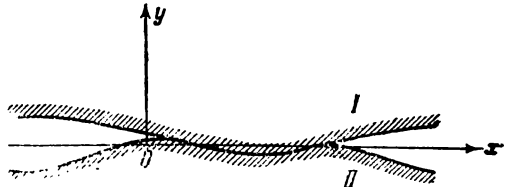


Рис. 5.

Множество точек оси Ox , для которых имеет место соприкосновение тел перед сжатием, будем обозначать через S_0 . При сжатии силами, параллельными оси Oy , между этими упругими телами в общем случае возникнет контакт ещё вдоль некоторых дополнительных участков оси Ox .

Множество точек оси Ox , для которых будет иметь место контакт между сжатыми телами, будем обозначать через S . В процессе сжатия упругие тела приобретут поступательные перемещения в направлении оси Oy , которые мы обозначим через $-\alpha_1$ и α_2 . Таким образом, между сжимаемыми телами произойдёт сближение a , равное $\alpha_1 + \alpha_2$. Пусть две точки упругих тел, занимавшие перед сжатием положение A_1 и A_2 , соприкоснулись в результате сжатия в точке A (см. рис. 6, где пунктиром показаны очертания сжимаемых

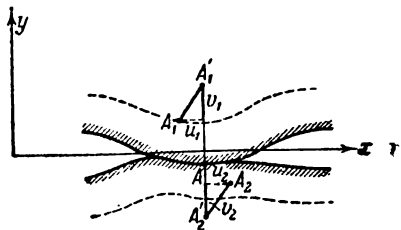


Рис. 6.

тел до сжатия, а сплошной линией после сжатия). Перемещения этих точек A_1A и A_2A будут складываться из поступательных перемещений A'_1A и A'_2A , равных соответственно $-\alpha_1$ и α_2 и упругих перемещений $A_1A'_1$ и $A_2A'_2$. Обозначим через u_1, v_1 и $-u_2, -v_2$ упругие перемещения точек A_1 и A_2 в направлении осей Ox и Oy . Если

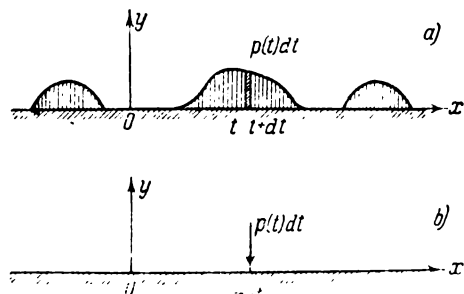


Рис. 7.

точка A имеет абсциссу x , то абсциссы точек A_1 и A_2 будут соответственно равны $x - u_1$ и $x + u_2$, а ординаты $f_1(x - u_1)$ и $-f_2(x + u_2)$ согласно (1). Рассматривая перемещение A_1A точки A_1 , найдём для ординаты точки A выражение

$$f_1(x - u_1) + v_1 - \alpha_1;$$

рассматривая перемещение A_2A точки A_2 , получим для ординаты точки A значение

$$-f_2(x + u_2) - v_2 + \alpha_2.$$

Таким образом, должно иметь место равенство

$$f_1(x - u_1) + v_1 - \alpha_1 = -f_2(x + u_2) - v_2 + \alpha_2,$$

или

$$v_1 + v_2 = \alpha - f_1(x - u_1) - f_2(x + u_2), \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ — сближение упругих тел при сжатии. Рассматривая лишь малые упругие перемещения, можем заменить в (2) $f_1(x - u_1)$ и $f_2(x + u_2)$ на $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Получим тогда для точек контакта условие

$$v_1 + v_2 = \alpha - f_1(x) - f_2(x) \text{ на } S. \quad (3)$$

Будем далее предполагать, что трение между сжимаемыми телами отсутствует. Тогда в точках контакта каждое из сжатых тел будет испытывать со стороны другого тела лишь нормальное давление, которое мы обозначим через $p(x)$. Полагая, что вся область контакта мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, будем считать, что упругие перемещения v_1 и v_2 в точке с абсциссой x будут такими же, как у граничных точек двух упругих полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального давления $p(x)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела.

Рассмотрим нижнюю упругую полуплоскость, к границе которой приложено нормальное давление $p(x)$ на участках оси Ox , соответствующих участкам контакта сжимаемых тел (рис. 7, а). Выделим на каком-либо из этих участков отрезок

оси Ox от точки $x=t$ (рис. 7, б) до бесконечно близкой точки $x=t+dt$. На этот участок будет действовать сила $p(t)dt$. Так как участок dt , на который действует эта сила, бесконечно мал, действие этой силы на упругую полуплоскость будет таким же, как если бы к упругой полуплоскости была приложена бесконечно малая сосредоточенная сила $p(t)dt$ в точке $x=t$. Задача о действии нормальной сосредоточенной силы на границу упругой полуплоскости хорошо известна в теории упругости¹⁾. Если в точке $x=t$ к границе упругой полуплоскости приложена нормальная сосредоточенная сила P , то граничная точка упругой среды с абсциссой x получает перемещение v в направлении оси Oy , равное

$$v = -\vartheta P \ln \frac{1}{r} + \text{const.}, \quad (4)$$

где

$$r = |t - x| \quad (5)$$

— расстояние между точками оси Ox с абсциссами t и x ;

$$\vartheta = \frac{2}{\pi E} (1 - \mu^2), \quad (6)$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

Таким образом, сила $p(t)dt$, приложенная к границе упругой полуплоскости в точке $t=x$, вызовет в точке границы с абсциссой x перемещение в направлении оси Oy :

$$dv = -\vartheta p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.},$$

а действие всей нагрузки p , приложенной (рис. 7, а) к границе упругой полуплоскости, создаст в точке с абсциссой x перемещение

$$v = -\vartheta \int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.}^2) \quad (7)$$

Если это же нормальное давление p будет действовать на границу верхней упругой полуплоскости, то граничная точка с абсциссой x получит перемещение v в направлении оси Ox , равное

$$v = \vartheta \int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.} \quad (8)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, 1937, стр. 101.

²⁾ Задачу о действии сосредоточенной силы на упругую среду следует рассматривать как абстракцию, не отражающую реально возможных условий задачи теории упругости. Однако, пользуясь этим формальным решением уравнений теории упругости, легко перейти к решению реальной задачи о действии непрерывно распределённой нагрузки на упругую среду.

Таким образом при сделанных допущениях перемещения v_1 и v_2 на рис. 6 будут соответственно равны:

$$v_1 = \vartheta_1 \int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.} \quad (9)$$

согласно формуле (8) для верхней полуплоскости и

$$-v_2 = -\vartheta_2 \int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.} \quad (10)$$

согласно формуле (7) для нижней полуплоскости. В формулах (9) и (10)

$$\vartheta_1 = \frac{2}{\pi E_1} (1 - \mu_1^2), \quad \vartheta_2 = \frac{2}{\pi E_2} (1 - \mu_2^2), \quad (11)$$

где E_1 и μ_1 — упругие постоянные первого тела, а E_2 и μ_2 — упругие постоянные второго тела.

Подставляя v_1 и v_2 из (9) и (10) в (3), получим для давления $p(x)$ интегральное уравнение

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = c - f_1(x) - f_2(x) \text{ на } S, \quad (12)$$

или

$$\int_S p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x) \text{ на } S, \quad (13)$$

где

$$f(x) = \frac{c - f_1(x) - f_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (14)$$

c — некоторая постоянная. Уравнение (13) является основным интегральным уравнением плоской контактной задачи теории упругости, детально рассмотрено в главе I.

§ 2. Случай одного участка сжатия упругих тел

Рассмотрим сначала тот случай, когда первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xOy происходит в одной точке. Примем эту точку за начало координат (рис. 8). Будем сначала предполагать, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определяющие конфигурацию сжимаемых тел, имеют непрерывные первые и вторые производные в окрестности точки $x=0$. Направляя ось Ox по общей касательной к кривым, ограничивающим упругие тела в плоскости xOy , будем иметь:

$$f'_1(0) = f'_2(0) = 0. \quad (15)$$

Сумму вторых производных

$$f''_1(0) + f''_2(0)$$

будем сначала предполагать отличной от нуля. Ввиду малости упругих перемещений область контакта S после сжатия упругих тел будет малой, и в этой области сумму функций $f_1(x) + f_2(x)$ можно будет приближенно представить в виде:

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2} [f_1''(0) + f_2''(0)] x^2. \quad (16)$$

Относительно сил, сжимающих тела, будем считать, что их равнодействующие, перпендикулярные оси Ox , направлены к точке первоначального касания сжимаемых тел, т. е. к началу координат. Так как первоначальный просвет между сжимаемыми телами $f_1(x) + f_2(x)$ мы предполагаем согласно (16) симметричным относительно оси Oy , давление p на поверхностях сжатых тел будет также симметричным относительно оси Oy . Область контакта между сжатыми телами S будет представлять собой некоторый участок оси Ox $-a < x < a$. Интегральное уравнение (13) будет иметь вид:

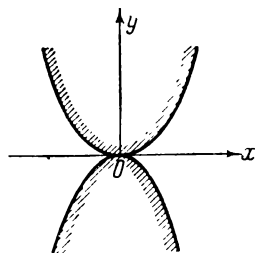


Рис. 8.

$$\int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x) \quad \text{при } -a < x < a, \quad (17)$$

где согласно (14) и (16)

$$f(x) = \frac{c - \frac{1}{2} [f_1''(0) + f_2''(0)] x^2}{\vartheta_1 + \vartheta_2},$$

или

$$f(x) = a - Ax^2, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{f_1''(0) + f_2''(0)}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (19)$$

а α — некоторая постоянная.

Интегральное уравнение (17) совпадает с уравнением (1), подробно рассмотренным нами в §§ 1, 2, 3 главы I. Для того случая, когда правая часть этого уравнения $f(x)$ имеет вид (18), нами было найдено решение:

$$p(x) = \frac{P + Aa^2 - 2Ax^2}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (20)$$

(формула (77) главы I), где

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (21)$$

Соотношение (21) показывает, что постоянная P , входящая

в формулу (20), определяет равнодействующую сжимающих сил, приложенных к каждому из сжатых тел и уравновешиваемых давлением, действующим на поверхности давления. Силу P мы будем считать заданной. Остаётся определить полуширину участка контакта a , входящую в формулу (20). Она определяется тем условием, что давление $p(x)$ должно быть ограниченным везде, включая и края участка контакта. Это возможно лишь тогда, когда

$$P = Aa^2, \quad (22)$$

и формула (20) принимает вид:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (23)$$

Подставляя (19) в (22), найдём:

$$a = \sqrt{\frac{2P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{f_1''(0) + f_2''(0)}}. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) полностью решают задачу, определяя по сжимающей силе P полуширину участка контакта a и давление в области контакта $p(x)$.

Рассмотрим теперь тот особый случай, когда сумма вторых производных определяется соотношением:

$$f_1''(0) + f_2''(0) = 0. \quad (25)$$

Будем для общности предполагать, что не только вторая производная от суммы $f_1(x) + f_2(x)$, но и все последующие производные вплоть до $2n-1$ -й включительно обращаются в нуль при $x=0$, производная же

$$f_1^{(2n)}(x) + f_2^{(2n)}(x)$$

отлична от нуля при $x=0$, будучи непрерывной в этой точке. В этом случае, учитывая малость участка контакта, можем при $-a \leq x \leq a$ приближённо положить

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{(2n)!} [f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0)] x^{2n}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (14), найдём, что в этом случае

$$f(x) = \alpha - A_n x^{2n}, \quad (27)$$

где

$$A_n = \frac{f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0)}{(2n)! (\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (28)$$

а α — некоторая постоянная.

Чтобы решить интегральное уравнение (17) для того случая, когда правая часть этого уравнения имеет вид (27), воспользуемся общей формулой для решения уравнения (17):

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[P - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt \right] \quad (29)$$

(см. формулу (115) главы I).

Для того чтобы функция $p(x)$, определяемая формулой (29), оставалась ограниченной при $x = a$, должно выполняться условие

$$P = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{a - t} dt. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и пользуясь тождеством

$$\frac{1}{a-t} + \frac{1}{t-x} = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 - t^2)(t-x)} + \frac{a-x}{a^2 - t^2},$$

получим:

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} - \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (31)$$

Для того чтобы функция $p(x)$, определяемая формулой (31), оставалась ограниченной при $x = -a$, должно выполняться условие

$$\int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0. \quad (32)$$

Если условие (32) выполняется, то, пользуясь тождеством

$$\frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{a - t} = \frac{a + t}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

формуле (30) можем придать вид:

$$\int_{-a}^a \frac{f'(t) t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\pi P, \quad (33)$$

а формула (31) будет в этом случае иметь вид:

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}. \quad (34)$$

Для того случая, когда функция $f(x)$ имеет вид (27), условие (32) выполняется, так как в этом случае в определённом

интеграле (32) подынтегральная функция будет нечётной. Подставляя (27) в (34), найдём:

$$p(x) = \frac{2n}{\pi^2} A_n \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{t^{2n-1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)}. \quad (35)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{t^{2n-1}}{t-x} = \frac{x^{2n-1}}{t-x} + t^{2n-2} + t^{2n-3}x + \dots + tx^{2n-3} + x^{2n-2},$$

можем формуле (35) придать вид:

$$p(x) = \frac{2n}{\pi^2} A_n \sqrt{a^2 - x^2} \times \\ \times \left[\sum_{m=0}^{2n-2} J_m a^m x^{2n-2-m} + x^{2n-1} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} \right], \quad (36)$$

где

$$J_m = \frac{1}{a^m} \int_{-a}^a \frac{t^m dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (37)$$

Интегрируя по частям, найдём:

$$\frac{1}{a^m} \int_{-a}^a \frac{t^m dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{t^{m-1}}{a^m} \sqrt{a^2 - t^2} \Big|_{t=-a}^{t=a} + \frac{m-1}{a^m} \int_{-a}^a t^{m-2} \sqrt{a^2 - t^2} dt = \\ = \frac{m-1}{a^{m-2}} \int_{-a}^a \frac{t^{m-2} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \frac{m-1}{a^m} \int_{-a}^a \frac{t^m dt}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

откуда, пользуясь обозначением (37), найдём:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}. \quad (38)$$

При m чётном из формулы (38) следует:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} J_{m-4} = \dots = \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{m(m-2)\dots 4 \cdot 2} J_0 = \\ = \frac{1 \cdot 3 \dots (m-3)(m-1)}{2 \cdot 4 \dots (m-2)m} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (m-3)(m-1)}{2 \cdot 4 \dots (m-2)m} \pi. \quad (39)$$

При m нечётном $J_m = 0$, так как в этом случае подынтегральная функция в (37) нечётная.

В главе I мы показали, что уравнение

$$\int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = x, \quad -a < x < a, \quad (40)$$

где α — постоянная, имеет решение:

$$p(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (41)$$

(см. формулу (74) главы I). Подставляя (41) в (40), найдём:

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \text{const.} \quad \text{при } -a < x < a. \quad (42)$$

Отсюда дифференцированием по x найдём:

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} = 0 \quad \text{при } -a < x < a. \quad (43)$$

Подставляя (39) и (43) в (36), получим:

$$p(x) = \frac{2n}{\pi} A_n \sqrt{a^2 - x^2} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} a^{2n-2} + \right. \\ \left. \mp \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{2 \cdot 4 \dots (2n-4)} a^{2n-4} x^2 + \dots + \frac{1}{2} a^2 x^{2n-4} + x^{2n-2} \right]. \quad (44)$$

Подставляя (27) в (33), найдём:

$$2n A_n \int_{-a}^a \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \pi P,$$

или, пользуясь обозначением (37),

$$2n A_n a^{2n} J_{2n} = \pi P.$$

Отсюда согласно (39)

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n-4)(2n-2)} A_n a^{2n} = P. \quad (45)$$

Подставляя A_n из (45) в (44), найдём:

$$p(x) = \frac{P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \left[\frac{2n}{2n-1} \mp \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \frac{x^2}{a^2} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1} \frac{x^{2n-2}}{a^{2n-2}} \right]. \quad (46)$$

Подставляя (28) в (45), найдём:

$$a = \sqrt[2n]{\frac{2 \cdot 4 \dots (2n-4)(2n-2)(2n)! (\vartheta_1 + \vartheta_2) P}{1 \cdot 3 \dots (2n-3)(2n-1) [f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0)]}},$$

ИЛИ

$$a = 2 \cdot 4 \dots (2n - 2) 2n \sqrt{\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) P}{2n [f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0)]}}. \quad (47)$$

Формулы (46) и (47) определяют полуширину участка контакта a и давление в области контакта $p(x)$. При $n=1$ формулы (46) и (47) переходят в формулы (23) и (24). На рис. 9 показаны ¹⁾ графики функции $p(x)$ для различных n , соответствующие одинаковой полуширине участка контакта a и одинаковой сжимающей силе P^2 .

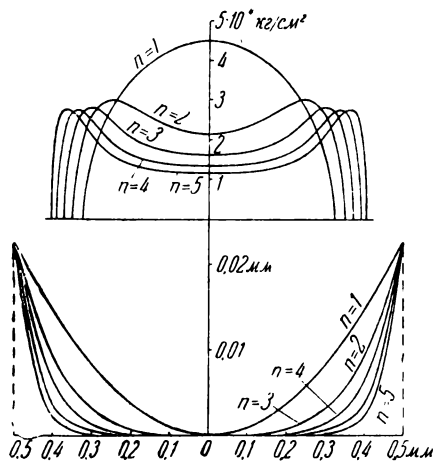


Рис. 9.

До сих пор мы предполагали, что вторая производная от суммы функций $f_1(x) + f_2(x)$ непрерывна в окрестности точки $x=0$. Рассмотрим теперь тот особый случай, когда точка $x=0$ является точкой разрыва для второй производной от суммы функций $f_1(x) + f_2(x)$. При этом указанная вторая производная может, либо оставаясь ограниченной, иметь скачок

в точке $x=0$, либо обращаться в бесконечность в этой точке.

Начнём с первого из этих двух случаев. Итак, пусть

$$\left. \begin{aligned} f_1''(0) + f_2''(0) &= 2A_+ \quad \text{при } x = +0, \\ f_1''(0) + f_2''(0) &= 2A_- \quad \text{при } x = -0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Тогда, учитывая малость участка контакта, можно приближённо положить

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= A_+ x^2 \quad \text{при } x > 0, \\ f_1(x) + f_2(x) &= A_- x^2 \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Будем сначала считать, в соответствии с исходными предположениями § 1 этой главы, что сжимаемые тела могут иметь лишь поступательные перемещения, параллельные оси Oy . В этом случае мы можем пользоваться для определения давления $p(x)$ уравнением (13), правая часть которого $f(x)$ определяется соотношением (14). Область контакта сжатых тел S

¹⁾ См. также мою статью в Докладах АН СССР, т. 25, № 5, 1936.

²⁾ В расчётах принято $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, $\sigma = 0,3$.

не будет уже симметричной относительно начала координат. Обозначим абсциссы начала и конца участка контакта через $-a + \delta$ и $a + \delta$. Тогда уравнение (13) будет иметь вид:

$$\int_{-a+\delta}^{a+\delta} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad -a + \delta \leq x \leq a + \delta. \quad (50)$$

Полагая в (50)

$$t = \tau + \delta, \quad x = \xi + \delta, \quad (51)$$

получим уравнение

$$\int_{-a}^a p(\tau + \delta) \ln \frac{1}{|\tau - \xi|} d\tau = f(\xi + \delta), \quad -a \leq \xi \leq a, \quad (52)$$

которое согласно формуле (34) будет иметь решение:

$$p(\xi + \delta) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - \xi^2} \int_{-a}^a \frac{f'(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)}, \quad (53)$$

причём должны выполняться условия (32) и (33), которые в данном случае будут иметь вид:

$$\int_{-a}^a \frac{f'(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} = 0, \quad \int_{-a}^a \frac{f'(\tau + \delta) \tau d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} = -\pi P. \quad (54)$$

Подставляя (49) в (14), найдём:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2A_+}{\vartheta_1 + \vartheta_2} x \quad \text{при } x > 0, \\ f'(x) &= -\frac{2A_-}{\vartheta_1 + \vartheta_2} x \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Подставляя (55) в (53), получим:

$$\begin{aligned} p(\xi + \delta) &= \frac{2\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[A_- \int_{-a}^{-\delta} \frac{(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} + A_+ \int_{-\delta}^a \frac{(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ A_- \int_{-a}^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} + A_+ \int_{-\delta}^a \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} + \right. \\ &\left. + (\xi + \delta) \left[A_- \int_{-a}^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} + A_+ \int_{-\delta}^a \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} \right] \right\}. \quad (56) \end{aligned}$$

Полагая

$$\tau = \frac{2au}{1+u^2}, \quad \xi = \frac{2av}{1+v^2}, \quad \delta = \frac{2au_0}{1+u_0^2}, \quad (57)$$

($|u| < 1$ и $|v| < 1$ при $|\tau| < a$ и $|\xi| < a$),

найдем:

$$\begin{aligned} \int_a^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} &= \frac{1+v^2}{a} \int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{(u-v)(1-uv)} = \\ &= \frac{1+v^2}{a(1-v^2)} \left(\int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{u-v} \oplus \int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{\frac{1}{v}-u} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

При $\xi < -\delta$, $v < -u_0$, вычисляя главное значение определенного интеграла, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{u-v} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{v-\varepsilon} \frac{du}{u-v} + \int_{v+\varepsilon}^{-u_0} \frac{du}{u-v} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln(v-u) \Big|_{u=-1}^{u=v-\varepsilon} + \right. \\ &\left. \oplus \ln(u-v) \Big|_{u=v+\varepsilon}^{u=-u_0} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \frac{\varepsilon(-u_0-v)}{(1+v)\varepsilon} \right] = \ln \left(-\frac{u_0+v}{1+v} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

При $\xi > -\delta$, $v > -u_0$, непосредственно находим:

$$\int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{u-v} = \ln(v-u) \Big|_{u=-1}^{u=-u_0} = \ln \frac{u_0+v}{1+v}. \quad (60)$$

Формулы (59) и (60) можно объединить в одну:

$$\int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{u-v} = \ln \frac{|u_0+v|}{1+v}. \quad (61)$$

Находим далее:

$$\int_{-1}^{-u_0} \frac{du}{\frac{1}{v}-u} = -\ln \left(\frac{1}{v}-u \right) \Big|_{u=-1}^{u=-u_0} = \ln \frac{1+v}{1+u_0v}. \quad (62)$$

Подставляя (61) и (62) в (58), найдем:

$$\int_a^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} = \frac{1+v^2}{a(1-v^2)} \ln \frac{|u_0+v|}{1+u_0v} \quad (|v| < 1). \quad (63)$$

Полагая далее

$$v = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad u_0 = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \varphi_0 < \pi), \quad (64)$$

найдем, согласно (57):

$$\xi = a \cos \varphi, \quad \delta = -a \cos \varphi_0, \quad (65)$$

а формула (63) примет в этом случае вид:

$$\int_{-a}^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} = \frac{1}{a \sin \varphi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right|. \quad (66)$$

Согласно (43)

$$\int_{-\delta}^a \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} = - \int_{-a}^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \xi)} = - \frac{1}{a \sin \varphi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right|. \quad (67)$$

Полагая $\tau = a \cos \varphi$ и принимая во внимание (65), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^{-\delta} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} &= \int_{\varphi_0}^{\pi} d\varphi = \pi - \varphi_0, \\ \int_{-\delta}^a \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} &= \int_0^{\varphi_0} d\varphi = \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Подставляя (65), (66), (67) и (68) в (56), найдём:

$$p = \frac{2a}{\pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ \sin \varphi [A_+ \varphi_0 + A_- (\pi - \varphi_0)] \mp \right. \\ \left. + (\cos \varphi - \cos \varphi_0) (A_+ - A_-) \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right| \right\}, \quad (69)$$

$$0 < \varphi < \pi.$$

Согласно (51) и (65)

$$x = a (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (70)$$

Формулы (69) и (70) определяют функцию $p(x)$ в интервале $-a + \delta < x < a + \delta$.

Подставляя (55) в (54), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_- \int_{-a}^{-\delta} \frac{(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} + A_+ \int_{-\delta}^a \frac{(\tau + \delta) d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} &= 0, \\ A_- \int_{-a}^{-\delta} \frac{(\tau + \delta) \tau d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} + A_+ \int_{-\delta}^a \frac{(\tau + \delta) \tau d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} &= \frac{\pi}{2} P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Полагая в (71) $\tau = a \cos \varphi$, $\delta = -a \cos \varphi_0$, найдём:

$$A_- \int_{\varphi_0}^{\pi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi + A_+ \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi = 0,$$

$$a^2 \left[A_- \int_{\varphi_0}^{\pi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \cos \varphi d\varphi + A_+ \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \cos \varphi d\varphi \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} P (\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

или, выполняя интегрирование,

$$\left. \begin{aligned} A_+ (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) - A_- (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0) &= 0, \\ a^2 [A_+ (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - A_- (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \pi)] &= \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

$$= \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2).$$

Первое из уравнений (72) даёт:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0 = \frac{\pi}{\frac{A_+}{A_-} - 1}. \quad (73)$$

Умножая первое из уравнений (72) на $\frac{a^2}{\cos \varphi_0}$ и складывая со вторым, найдём:

$$a^2 \sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 (A_+ - A_-) = \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

откуда

$$a = \frac{1}{\sin \varphi_0} \sqrt{\frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{(A_+ - A_-) \operatorname{tg} \varphi_0}}. \quad (74)$$

Определив φ_0 из уравнения (73), мы по формуле (74) найдём полуширину участка контакта a , по второй из формул (65) — смещение участка контакта по отношению к началу координат δ и далее, по формулам (69) и (70), сможем определить давление $p(x)$ в области контакта $-\delta + \delta < x < a + \delta$.

На рис. 10 показан график давления $p(x)$ для случая $\varphi_0 = 120^\circ$. Заметим, что давление $p(x)$ в рассматриваемом случае

приводится не только к силе P , приложенной в начале координат, но и к некоторому моменту M относительно точки $x = 0$.

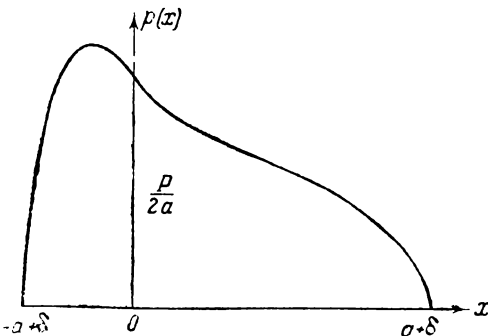


Рис. 10.

Вычислим этот момент M . Находим:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-a+\delta}^{a+\delta} p(t) t dt = \int_{-a}^a p(\tau + \delta) (\tau + \delta) d\tau = \\ &= P\delta + \int_{-a}^a p(\tau + \delta) \tau d\tau, \end{aligned} \quad (75)$$

так как

$$\int_{-a}^a p(\tau + \delta) d\tau = \int_{-a+\delta}^{a+\delta} p(t) dt = P.$$

Дифференцируя (52) по ξ , умножая на $\sqrt{a^2 - \xi^2}$ и интегрируя затем по ξ от $-a$ до a , найдём:

$$\int_{-a}^a p(\tau + \delta) \left[\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\tau - \xi} d\xi \right] d\tau = \int_{-a}^a f'(\xi + \delta) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi. \quad (76)$$

Находим далее:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\tau - \xi} d\xi &= (a^2 - \tau^2) \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\tau - \xi)} + \tau \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \\ &+ \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \tau \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \pi\tau, \end{aligned} \quad (77)$$

если принять во внимание (43). Подставляя (77) в (76), получим:

$$\int_{-a}^a p(\tau + \delta) \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f'(\xi + \delta) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi. \quad (78)$$

Подставляя (78) в (75) и меняя обозначение аргумента, по которому ведётся интегрирование, найдём:

$$M = P\delta + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f'(\tau + \delta) \sqrt{a^2 - \tau^2} d\tau. \quad (79)$$

Подставляя (55) в (79), получим:

$$\begin{aligned} M &= P\delta - \frac{2}{\pi(\theta_1 + \theta_2)} \left(A_- \int_{-a}^{-\delta} (\tau + \delta) \sqrt{a^2 - \tau^2} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + A_+ \int_{\delta}^a (\tau + \delta) \sqrt{a^2 - \tau^2} d\tau \right), \end{aligned}$$

или, если положить $\tau = a \cos \varphi$, $\delta = -a \cos \varphi_0$,

$$\begin{aligned}
 M = P\delta - \frac{2a^3}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(A_- \int_{\varphi_0}^{\pi} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi + \right. \\
 \left. + A_+ \int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi \right) = P\delta - \frac{2a^3}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ \frac{A_+ - A_-}{3} \sin^3 \varphi_0 - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \cos \varphi_0 \left[(A_+ - A_-) (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) + \pi A_- \right] \right\} = P\delta - \\
 - \frac{2a^3}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ -\frac{A_+ - A_-}{6} \sin^3 \varphi_0 - \frac{1}{2} \cos \varphi_0 \left[(A_+ - A_-) (\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \pi A_- \right] \right\} = P\delta + \frac{(A_+ - A_-) a^3 \sin^3 \varphi_0}{3\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (80)
 \end{aligned}$$

на основании (73). Подставляя в (80) $a^3 \sin^3 \varphi_0$ из (74), найдём:

$$M = P\delta + \frac{a \cos \varphi_0}{3} P = \frac{2}{3} P\delta, \quad (81)$$

так как $a \cos \varphi_0 = -\delta$.

Итак, для того чтобы сжатые тела находились в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующие сжимающих сил были смещены относительно точки первоначального касания тел и пересекали ось Ox в точке $x = \frac{2}{3} \delta$. Если согласно поставленным нами выше условиям равнодействующие сжимающих сил направлены к началу координат, но в то же время сжимаемые тела могут совершать лишь поступательные перемещения, то связь, препятствующая повороту тел при сжатии, будет принимать на себя момент M , определяемый соотношением (81).

Допустим теперь, что равнодействующие сжимающих сил, как и ранее, направлены к началу координат, но связь, препятствующая поворотам сжимаемых тел, отсутствует. Решим контактную задачу при этих условиях.

Соотношение (3), связывающее упругие перемещения граничных точек сжимаемых тел v_1 и v_2 , выведено нами в том предположении, что при сжатии упругие тела совершают лишь поступательные перемещения $-\alpha_1$ и α_2 в направлении оси Oy и между ними происходит при этом сближение $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Допустим теперь, что при сжатии упругое тело, расположенное в верхней полуплоскости, кроме поступательного перемещения, совершает ещё поворот относительно начала координат на угол $-\theta_1$, а упругое тело поворачивается относительно начала координат на угол θ_2 (будем иметь в виду повороты

против часовой стрелки). Тогда между граничными точками сжимаемых тел, имеющими абсциссу x , произойдет дополнительное сближение, равное θx , где $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Чтобы получить в этом случае связь между упругими перемещениями v_1 и v_2 , надо постоянное сближение α в формуле (3) заменить переменным сближением $\alpha + \theta x$. Получим соотношение

$$v_1 + v_2 = \alpha + \theta x - f_1(x) - f_2(x) \text{ на } S. \quad (82)$$

Подставляя в (3) v_1 и v_2 из (9) и (10), придём к тому же уравнению (13), но для функции $f(x)$ получим вместо (14) выражение

$$f(x) = \frac{\alpha + \theta x - f_1(x) - f_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (83)$$

Подставляя (83) в (53), найдём:

$$p(\xi + \delta) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \left[\theta \int_{-a}^{\alpha} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} - \int_{-a}^{\alpha} \frac{f'_1(\tau + \delta) + f'_2(\tau + \delta)}{\sqrt{a^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} d\tau \right]. \quad (84)$$

Но первый интеграл в формуле (84) равен нулю. Таким образом, выражение для давления p останется тем же, что и при отсутствии относительного поворота сжимаемых тел θ , и мы попрежнему для давления p будем иметь формулу (69). Подставляя (83) в (54), получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta \int_{-a}^{\alpha} \frac{d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} - \int_{-a}^{\alpha} \frac{f'_1(\tau + \delta) + f'_2(\tau + \delta)}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} d\tau &= 0, \\ \theta \int_{-a}^{\alpha} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} - \int_{-a}^{\alpha} \frac{f'_1(\tau + \delta) + f'_2(\tau + \delta)}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} \tau d\tau &= -\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Подставляя (49) в (85), полагая $\tau = a \cos \varphi$, $\delta = -a \cos \varphi_0$ и выполняя интегрирование, получим на этот раз вместо уравнений (72) уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_+(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) - A_-(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0 + \pi \cos \varphi_0) &= \frac{\pi \theta}{2a}, \\ A_+(\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) - A_-(\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \pi) &= \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Подставляя (83) в (79), найдём:

$$M = P \delta \left[\frac{\theta}{\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_{-a}^{\alpha} \sqrt{a^2 - \tau^2} d\tau - \frac{1}{\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_{-a}^{\alpha} [f'_1(\tau + \delta) + f'_2(\tau + \delta)] \sqrt{a^2 - \tau^2} d\tau \right]. \quad (87)$$

Подставляя (49) в (87) и производя те же выкладки, что и при выводе формулы (80), получим:

$$M = -Pa \cos \varphi_0 + \frac{2a^3}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ \frac{A_+ - A_-}{6} \sin^3 \varphi_0 + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi_0}{2} [(A_+ - A_-)(\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0) + \pi A_-] \right\} + \frac{\theta a^3}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (88)$$

Но так как сжимаемые тела могут свободно вращаться относительно начала координат, момент M , который образует относительно точки $x=0$ давление $p(x)$, должен быть равен нулю. Согласно (88) получаем уравнение

$$\frac{1}{3} (A_+ - A_-) \sin^3 \varphi_0 + \cos \varphi_0 [(A_+ - A_-)(\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0) + \pi A_-] = \\ = \frac{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{a^2} P \cos \varphi_0 - \frac{\pi \theta}{2a}. \quad (89)$$

Складывая первое из уравнений (86) с уравнением (89), найдём:

$$\frac{1}{3} (A_+ - A_-) \sin^3 \varphi_0 = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{a^2} \cos \varphi_0. \quad (90)$$

Разделив (90) на $\cos \varphi_0$ и отняв от второго из уравнений (86), получим уравнение

$$\frac{1}{3} (A_+ - A_-) (3 \varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0) = -\pi A_-,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_0 + \sin 2 \varphi_0 - 3 \varphi_0 = \frac{3\pi}{\frac{A_+}{A_-} - 1}. \quad (91)$$

Из (90) находим:

$$a = \frac{1}{\sin \varphi_0} \sqrt{\frac{3 \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{(A_+ - A_-) \operatorname{tg} \varphi_0}}. \quad (92)$$

Умножая второе из уравнений (86) на $\cos \varphi_0$ и складывая с первым из этих уравнений, найдём:

$$(A_+ - A_-) \sin^3 \varphi_0 = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{a^2} \cos \varphi_0 + \frac{\pi \theta}{2a}. \quad (93)$$

Исключая $A_+ - A_-$ из уравнений (90) и (93), найдём:

$$\theta = \frac{4 P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{a} \cos \varphi_0. \quad (94)$$

Уравнение (91) определяет угол φ_0 , после чего формулы (92), (94) и соотношения $\delta = -a \cos \varphi_0$ определяют полуширину участка контакта a , смещение этого участка относительно начала координат δ и относительный поворот сжимаемых тел θ , а формулы (69) и (70) определяют давление $p(x)$ в области контакта $-a + \delta < x < a + \delta$.

Итак, для того случая, когда вторая производная от суммы функций $f_1(x) + f_2(x)$ имеет скачок в точке $x=0$, контактная задача полностью решена нами, как при условии одного лишь поступательного перемещения тел, так и при условии поступательного перемещения и относительного их поворота.

Перейдём теперь к тому случаю, когда вторая производная от суммы функций $f_1(x) + f_2(x)$ обращается в бесконечность в точке $x=0$. Будем предполагать, что в области контакта указанная сумма функций может быть представлена в виде:

$$f_1(x) + f_2(x) = A|x|^k \quad (1 < k < 2). \quad (95)$$

Подставляя (95) в (14), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{c - A|x|^k}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \\ f'(x) &= -\frac{Ak|x|^{k-1}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \quad \text{при } x > 0, \\ f'(x) &= \frac{Ak|x|^{k-1}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Подставляя (96) в формулу (34) для давления $p(x)$, найдём:

$$p(x) = \frac{Ak\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[-\int_{-a}^0 \frac{|t|^{k-1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} + \int_0^a \frac{|t|^{k-1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} \right]. \quad (97)$$

Заменяя t на $-t$, получим:

$$-\int_{-a}^0 \frac{|t|^{k-1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t-x)} = \int_0^a \frac{|t|^{k-1} dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t+x)}. \quad (98)$$

Подставляя (98) в (97), найдём:

$$p(x) = \frac{2Ak\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_0^a \frac{t^k dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t^2 - x^2)}. \quad (99)$$

Условие (32) в данном случае выполняется, так как функция $f'(x)$, определяемая соотношениями (96), начётная. Подставляя (96) в (33), найдём:

$$\int_{-a}^0 \frac{|t|^k dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} + \int_0^a \frac{|t|^k dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Ak},$$

или

$$2 \int_0^a \frac{t^k dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Ak}. \quad (100)$$

Полагая в (99) и (100) $t = a\tau$, найдём:

$$p(x) = \frac{2Aka^{k-1}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \int_0^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} \left(\tau^2 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, \quad (101)$$

$$a^k \int_0^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2Ak}. \quad (102)$$

Подставляя A из (102) в (101), получим формулу

$$p(x) = \frac{P}{\pi a} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \int_0^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} \left(\tau^2 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}{\int_0^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}. \quad (103)$$

Из (102) найдём:

$$a = \left[\frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2Ak \int_0^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}} \right]^{\frac{1}{k}}. \quad (104)$$

Формула (104) определяет полуширину участка контакта a , формула (103) — давление $p(x)$. Определённые интегралы, вхо-

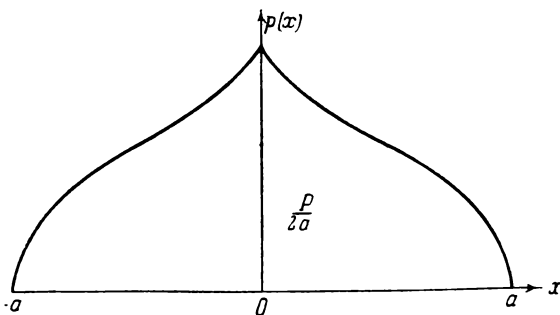


Рис. 11.

дящие в формулы (103) и (104), при $1 < k < 2$ не выражаются через элементарные функции. При $k = 3/2$ эти определённые интегралы (эллиптические) после приведения к каноническому виду могут вычисляться по имеющимся для эллиптических интегралов таблицам¹⁾. На рис. 11 показан график давления $p(x)$, вычисленного по формуле (103) для случая $k = 3/2$. Давление

¹⁾ См. Приложение 1, п. 6.

$p(x)$ ограничено во всей области контакта $-a \leq x \leq a$, однако производная $p'(x)$ претерпевает разрыв в точке $x=0$, кривая, изображающая функцию $p(x)$, имеет при $x=0$ угловую точку.

В заключение этого параграфа отметим предельный случай рассмотренной задачи, когда $k=1$. При $k=1$ согласно формуле (96)

$$f(x) = \frac{c-A|x|}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (105)$$

В главе I мы показали, что для того случая, когда правая часть интегрального уравнения (17) $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \alpha - A|x|, \quad (106)$$

это уравнение имеет решение:

$$p(x) = -\frac{2A}{\pi^2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|}, \quad (107)$$

обращающееся в нуль при $|x|=a$, если

$$\dot{P} = \frac{2Aa}{\pi} \quad (108)$$

(формулы (203) и (204) главы I).

Заменяя в (107) и (108) A на $\frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2}$, получим решение задачи для того случая, когда функция $f(x)$ имеет вид (105). Находим:

$$p(x) = -\frac{2A}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} \quad (109)$$

$$\text{при} \quad \dot{P} = \frac{2Aa}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (110)$$

Подставляя A из (110) в (109), получим формулу

$$p(x) = -\frac{P}{\pi a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|}. \quad (111)$$

Из (110) находим:

$$a = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2A}. \quad (112)$$

Формула (112) определяет полуширину участка контакта a , формула (111) — давление $p(x)$. На рис. 12, а показан график функции $p(x)$, определяемой формулой (111). В точке $x=0$ давление $p(x)$ обращается в бесконечность. Как видно из (95), для рассматриваемого случая ($k=1$) просвет между сжимаемыми телами до сжатия определяется формулой

$$f_1(x) + f_2(x) = A|x|, \quad (113)$$

конфигурация сжимаемых тел в окрестности точки их первоначального касания имеет вид, показанный на рис. 12, *b*. Таким образом, рассматриваемый предельный случай $k=1$ соответствует

сжатию двух клиньев или давлению клина на прямолинейную границу упругой среды. В этом предельном случае в точке $x=0$ претерпевает разрыв уже не вторая производная от

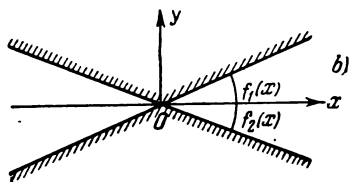
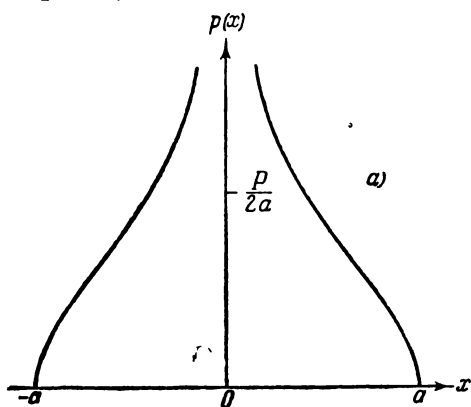


Рис. 12.

суммы функций $f_1(x) + f_2(x)$, а первая производная:

$$\left. \begin{aligned} f_1'(x) + f_2'(x) &= -A & \text{при } x = -0, \\ f_1'(x) + f_2'(x) &= A & \text{при } x = +0. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

§ 3. Задача о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость

В предыдущем параграфе нами детально рассмотрен тот случай контактной задачи, в котором первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xOy осуществляется в одной точке. Рассмотрим теперь тот случай, когда первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xOy осуществляется не в точке, а вдоль некоторого отрезка оси Ox . Если длину этого отрезка обозначить через $2a$ и расположить начало координат в середине этого отрезка, то множество точек S_0 , в которых осуществляется первоначальный контакт между сжимаемыми телами, будет представлять собой отрезок оси Ox — $a < x < a$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда одно из сжимаемых тел имеет форму штампа с прямыми углами в сечении плоскостью xOy . Обычно в этой задаче это тело принято считать жёстким, и задача формулируется как задача о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость. В этом случае и после сжатия контакт между сжимаемыми телами будет осуществляться вдоль отрезка оси Ox — $a < x < a$ и согласно

общим формулам (13) и (14) давление $p(x)$ под штампом будет определяться интегральным уравнением

$$\int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \alpha, \quad -a < x < a, \quad (115)$$

где α — некоторая постоянная, так как при $-a < x < a$ первоначальный просвет между сжимаемыми телами $f_1(x) + f_2(x) = 0$. В главе I мы показали, что уравнение (115) имеет решение:

$$p(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (116)$$

где $P = \int_{-a}^a p(x) dx$ — сжимающая сила (см. формулу (74) главы I). На рис. 13 показан график давления $p(x)$ под штампом, построенный в соответствии с формулой (116).

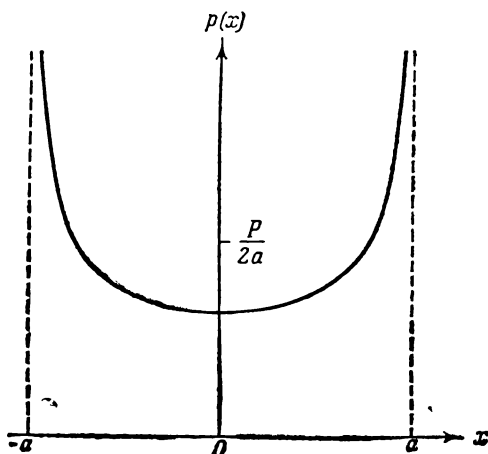


Рис. 13.

Давление $p(x)$ неограниченно возрастает при подходе к границам участка контакта $x = -a$ и $x = +a$. В конце предыдущей главы мы уже столкнулись со случаем обращения в бесконечность давления $p(x)$, когда рассматривали давление клина на упругую полуплоскость. В действительности реальный профиль упругого тела никогда не будет иметь угловых точек, так что клин или штамп, имеющий в сечении прямые углы, являющийся абстракциями, которые и приводят при решении контактной задачи к нереальному распределению давления в области контакта.

Ниже мы рассматриваем задачу о давлении штампа на упругую полуплоскость, считая, что профиль штампа имеет непрерывно вращающуюся касательную. Итак, если

$$y = f_1(x)$$

— уравнение кривой, ограничивающей штамп (рис. 14) в сечении плоскостью xOy , будем, как и ранее, считать, что

$$f_1(x) = 0 \quad \text{при } -a \leq x \leq a, \quad (117)$$

в окрестности же точек $x = -a$ и $x = a$ при $|x| > a$ приближённо представим функцию $f_1(x)$ первым членом её разложения в ряд Тэйлора:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} f_1''(a+0) (x-a)^2 && \text{при } x \geq a, \\ f_1(x) &= \frac{1}{2} f_1''(-a-0) (a+x)^2 && \text{при } x \leq -a, \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

считая, что при подходе к точке $x = a$ справа и к точке $x = -a$ слева вторая производная $f_1''(x)$ стремится к конечным отличным от нуля значениям. Эти значения будем считать равными, предполагая штамп симметричным, и обозначим через A :

$$f_1''(a+0) = f_1''(-a-0) = A. \quad (119)$$

Считая для простоты, что упругое тело, на которое давит штамп, имеет прямолинейную границу, совпадающую с осью Ox , примем

$$f_2(x) = 0. \quad (120)$$

Подставляя (117), (118) и (120) в (14) и принимая во внимание обозначение (119), найдём:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -\frac{A}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} (a+x)^2 + \text{const.} && \text{при } x \leq -a, \\ f(x) &= \text{const.} && \text{при } -a \leq x \leq a, \\ f(x) &= -\frac{A}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} (x-a)^2 + \text{const.} && \text{при } x \geq a, \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -\frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} (a+x) && \text{при } x \leq -a, \\ f'(x) &= 0 && \text{при } -a \leq x \leq a, \\ f'(x) &= -\frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} (x-a) && \text{при } x \geq a. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Обозначая через $2b$ ширину области контакта после сжатия ($b > a$), найдём давление $p(x)$ по общей формуле (34), заменяя в ней полуширину участка контакта a на b :

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{b^2 - x^2} \int_{-b}^b \frac{f'(t) dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)}. \quad (123)$$

Подставляя (122) в (123), найдём:

$$p(x) = \frac{A \sqrt{b^2 - x^2}}{\pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[\int_{-b}^{-a} \frac{(a+t) dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)} + \int_a^b \frac{(t-a) dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)} \right],$$

или

$$p(x) = \frac{A \sqrt{b^2 - x^2}}{\pi^2 (\partial_1 + \partial_2)} \left[(a+x) \int_{-b}^{-a} \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)} + \int_{-b}^{-a} \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}} + \right. \\ \left. + \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}} + (x-a) \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)} \right]. \quad (124)$$

Находим:

$$\int_{-b}^{-a} \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}} = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}} = \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad (125)$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{a}{b}. \quad (126)$$

Полагая

$$t = b \frac{2\tau}{1+\tau^2}, \quad x = b \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad (127)$$

найдем:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2} (t-x)} = \frac{1+\xi^2}{b} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{(\tau-\xi)(1-\tau\xi)} = \\ = \frac{1+\xi^2}{b(1-\xi^2)} \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\xi} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\frac{1}{\xi}} \right), \quad (128)$$

где ξ_1 и ξ_2 связаны с x_1 и x_2 соотношениями

$$x_1 = b \frac{2\xi_1}{1+\xi_1^2}, \quad x_2 = b \frac{2\xi_2}{1+\xi_2^2}. \quad (129)$$

Находим далее:

при $\xi < \xi_1$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\xi} = \ln(\tau-\xi) \Big|_{\tau=\xi_1}^{\tau=\xi_2} = \ln \frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}, \quad (130)$$

при $\xi > \xi_2$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\xi} = \ln(\xi-\tau) \Big|_{\tau=\xi_1}^{\tau=\xi_2} = \ln \frac{\xi-\xi_2}{\xi-\xi_1}, \quad (131)$$

при $\xi_1 < \xi < \xi_2$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\xi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\xi_1}^{\xi-\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau-\xi} + \int_{\xi+\varepsilon}^{\xi_2} \frac{d\tau}{\tau-\xi} \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln(\xi-\tau) \Big|_{\tau=\xi_1}^{\tau=\xi-\varepsilon} + \ln(\tau-\xi) \Big|_{\tau=\xi+\varepsilon}^{\tau=\xi_2} \right] = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon(\xi_2-\xi)}{(\xi-\xi_1)\varepsilon} = \ln \frac{\xi_2-\xi}{\xi-\xi_1}. \quad (132)$$

Формулы (130), (131) и (132) можно объединить в одну:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\tau - \xi} = \ln \left| \frac{\xi - \xi_2}{\xi - \xi_1} \right|. \quad (133)$$

Аналогично

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\tau - \frac{1}{\xi}} = \ln \left| \frac{1 - \xi\xi_2}{1 - \xi\xi_1} \right|. \quad (134)$$

Подставляя (133) и (134) в (128), найдём:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{b^2 - t^2}(t-x)} = \frac{1 + \xi^2}{b(1 - \xi^2)} \ln \left| \frac{(\xi - \xi_2)(1 - \xi\xi_1)}{(\xi - \xi_1)(1 - \xi\xi_2)} \right|. \quad (135)$$

Принимая во внимание (126), найдём из (129):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x_1 = -b, \quad x_2 = -a, \quad \xi_1 = -1, \quad \xi_2 = -\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \\ \text{при } x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad \xi_1 = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \quad \xi_2 = 1. \end{aligned} \right\} (136)$$

Полагая далее

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (137)$$

и подставляя (136) и (137) в (135), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-b}^{-a} \frac{dx}{\sqrt{b^2 - t^2}(t-x)} &= \frac{1}{b \cos \varphi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right|, \\ \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b^2 - t^2}(t-x)} &= \frac{1}{b \cos \varphi} \ln \left| \frac{\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right|. \end{aligned} \right\} (138)$$

Из (127) и (137) следует:

$$x = b \sin \varphi. \quad (139)$$

Подставляя в (124), (125), (138) и (139) и полагая, согласно (126),

$$a = b \sin \varphi_0, \quad (140)$$

найдем:

$$\begin{aligned} p = \frac{Ab \cos \varphi}{\pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\frac{\sin \varphi + \sin \varphi_0}{\cos \varphi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right| + \right. \\ \left. + \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{\cos \varphi} \ln \left| \frac{\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right| + \pi - 2\varphi_0 \right), \end{aligned}$$

ИЛИ

$$p = \frac{Ab}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[(\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi + \sin \varphi \ln \left| \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \right| + \right. \\ \left. + \sin \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| \right]. \quad (141)$$

Подставляя (122) в условие (33)¹⁾, получим уравнение

$$\int_{-b}^{-a} \frac{(a+t)t dt}{\sqrt{b^2-t^2}} + \int_a^b \frac{(t-a)t dt}{\sqrt{b^2-t^2}} = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}. \quad (142)$$

Полагая в (142) $t = b \sin \varphi$ и $a = b \sin \varphi_0$ согласно (140), найдём

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_0} (\sin \varphi_0 + \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Ab^2},$$

или, выполняя интегрирование,

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \frac{\sin 2\varphi_0}{2} = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Ab^2}. \quad (143)$$

Подставляя b из (140) в (139), (141) и (143), найдём:

$$\frac{\pi - 2\varphi_0}{2 \sin^2 \varphi_0} - \operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{\pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Aa^2}, \quad (144)$$

$$x = a \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}, \quad (145)$$

$$p = \frac{Aa}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) \sin \varphi_0} \left[(\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi + \sin \varphi \ln \left| \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \right| + \right. \\ \left. + \sin \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| \right]. \quad (146)$$

Подставляя A из (144) в (146), найдём:

$$p = \frac{2P \sin \varphi_0 \left[(\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi + \sin \varphi \ln \left| \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0)} \right| \right]}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)} + \\ + \frac{\sin^2 \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right|}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (147)$$

Формула (144) определяет угол φ_0 , после чего формулы (145) и (147) определяют давления $p(x)$ в области $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, соот-

¹⁾ Согласно с обозначением b , принятым в рассматриваемой задаче для полуширины участка контакта, надлежит при этом в (33) заменить a на b .

ветствующей области контакта $-b \leq x \leq b$ ($b = \frac{a}{\sin \varphi_0}$). На рис. 15 показаны графики давления $p(x)$, соответствующие различным значениям угла φ_0 , т. е. различным отношениям

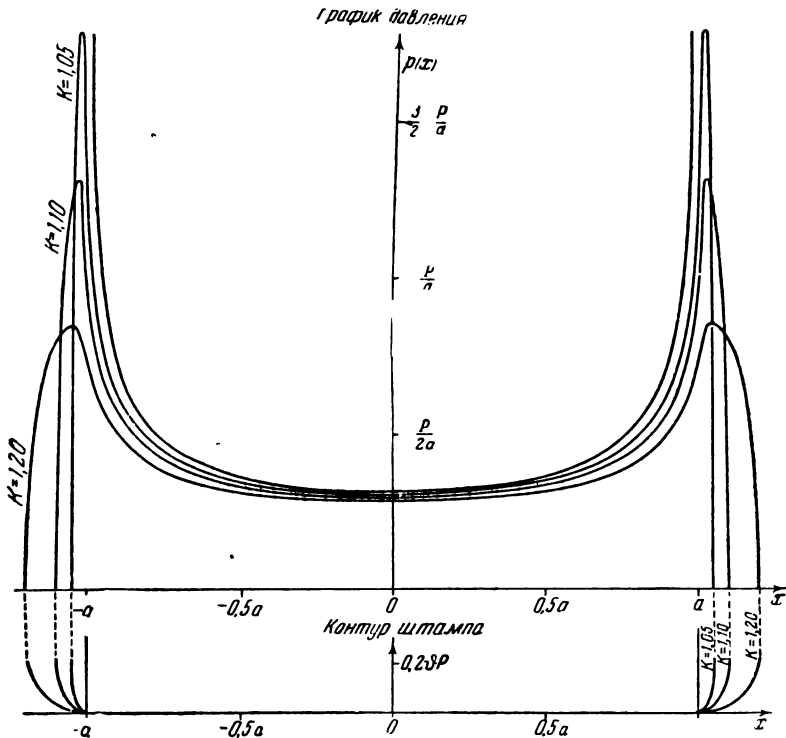


Рис. 15.

$k = \frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \right)$. Показанные на рис. 15 графики давления $p(x)$ соответствуют одинаковой полуширине основания штампа a (см. рис. 14), одинаковой сжимающей силе P и одинаковым упругим постоянным, но различным значениям k , т. е. различной кривизне закраин штампа, благодаря чему и меняется угол φ_0 (см. формулу (144)) и полуширина участка контакта $b = \frac{a}{\sin \varphi_0}$.

Итак, считая кривизну закраин штампа ограниченной и полагая, таким образом, реальные условия в основу задачи о давлении штампа, мы приходим к реальной картине распределения давления под штампом. Как видно из рис. 15, увеличение кривизны закраин штампа при прочих равных условиях

влечёт за собой увеличение максимального давления под штампом, однако давление это остаётся ограниченным, пока ограничена кривизна штампа.

Приведённые нами формулы (144), (145) и (147) дают возможность установить максимальное давление под штампом,

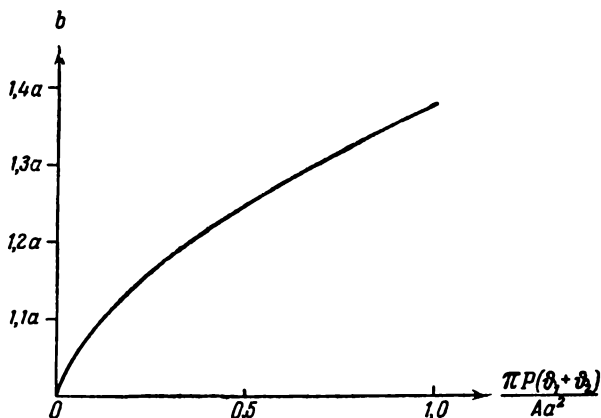


Рис. 16.

если задана конфигурация штампа (ширина его основания $2a$ и кривизна его закраин, т. е. A), упругие постоянные и сжимающая сила P . Показанный на рис. 16 график даёт возможность сразу отыскать по этим данным ширину площадки контакта b , не решая уравнения (144), после чего по формулам (145) и (147) можно вычислить давление $p(x)$ в любой точке контакта.

§ 4. Случай нескольких участков сжатия

До сих пор мы предполагали, что после сжатия контакт сжатых упругих тел осуществляется вдоль одного отрезка оси

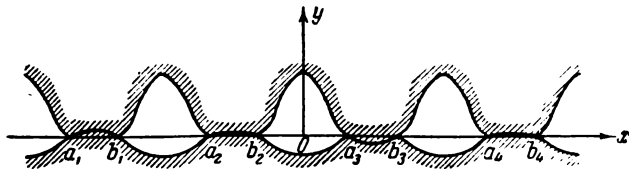


Рис. 17.

Ox , т. е. множество точек S , в которых происходит касание сжатых тел, представляет собой одну непрерывную линию. Рассмотрим теперь тот случай, когда контакт сжатых упругих тел осуществляется вдоль нескольких отрезков оси Ox : (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , ..., (a_n, b_n) (рис. 17). В этом случае основное интеграль-

ное уравнение контактной задачи (13) будет иметь вид:

$$\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = f(x), \quad a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (148)$$

где попрежнему

$$f(x) = \frac{c - f_1(x) - f_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (149)$$

Интегральное уравнение (148) полностью совпадает с уравнением (209) главы I. Как мы показали в главе I, решение этого уравнения имеет вид.

$p(x) =$

$$= \frac{(-1)^{n-l+1} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right| \frac{f'(t) dt}{t-x} + P_{n-1}(x) \right]}{\pi \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}}, \quad (150)$$

$$a_l < x < b_l,$$

где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$:

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1} - P \bar{x}^{n-1}, \quad (151)$$

P — сжимающая сила, т. е.

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) dt \quad (152)$$

(см. формулы (244), (245) и (246) главы I).

Коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ полинома $P_{n-1}(x)$ определяются из системы линейных уравнений:

$$\sum_{l=0}^{n-2} c_l \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{x^l dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} =$$

$$= (-1)^{n-m} [f(a_{m+1}) - f(b_m)] + P \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi} \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{1}{\sqrt{\prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m)}} \times \\
 & \times \left[\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \left| \frac{f'(t)dt}{t-x} \right| \right] dx, \quad (153) \\
 & m = 1, 2, \dots, n-1,
 \end{aligned}$$

(см. формулу (252) главы I).

Границы участков контакта, т. е. абсциссы $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$, будут определяться в общем случае из того условия, что давление $p(x)$ должно оставаться ограниченным во всей области контакта, включая и границы участков контакта $x = a_1, x = b_1, \dots, x = a_n, x = b_n$. Как видно из формулы (150), это возможно лишь в том случае, если числитель в этой формуле обращается в нуль при $x = a_l, x = b_l$ ($l = 1, 2, \dots, n$). Отсюда получаем $2n$ уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \times \\
 & \quad \times \frac{f'(t)dt}{t-a_l} + P_{n-1}(a_l) = 0, \\
 & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m)} \times \\
 & \quad \times \frac{f'(t)dt}{t-b_l} + P_{n-1}(b_l) = 0, \\
 & l = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

которые и определяют абсциссы $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$.

Полученные нами формулы полностью решают рассматриваемую задачу, определяя область контакта сжатых упругих тел и давление $p(x)$ в области контакта. В том частном случае, когда какие-либо из границ участков контакта заранее предопределяются конфигурацией сжимаемых тел, как в случае давления штампа с прямыми углами на упругую полуплоскость, рассмотренном в предыдущем параграфе, соответствующие из уравнений (154) должны быть отброшены.

Рассмотрим простейший пример, в котором штамп, имеющий конфигурацию, показанную на рис. 18, давит на упругую полуплоскость. Зазор δ мы будем предполагать настолько малым, что при сжатии контакт штампа с упругой полуплоскостью

осуществляется вдоль двух участков оси Ox : $-b < x < -a$ и $a < x < b$. В этом случае

$$n = 2, \quad a_1 = -b, \quad b_1 = -a, \quad a_2 = -a, \quad b_2 = b,$$

$$f_1(x) = 0 \text{ при } -b < x < -a, \quad f_1(x) = \delta \text{ при } a < x < b, \quad (155)$$

$$f_2(x) = 0, \quad (156)$$

и согласно (149)

$$f(x) = \alpha \text{ при } -b < x < -a, \quad f(x) = \alpha + \varepsilon \text{ при } a < x < b, \quad (157)$$

где

$$\varepsilon = -\frac{\delta}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \quad (158)$$

(если считать штамп абсолютно жёстким, то $\vartheta_1 = 0$), α — некоторая неопределённая постоянная.

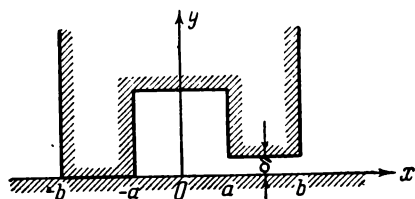


Рис. 18.

Решение интегрального уравнения (148) при условиях (155) и (157) было получено нами в главе I и согласно формулам (256) и (261) главы I имеет вид:

$$p(x) = \pm \frac{c_0 - Px}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad a < |x| < b, \quad (159)$$

где знак плюс берётся при $x < 0$ и знак минус при $x > 0$,

$$c_0 = -\frac{b\varepsilon}{2K(k)},$$

или, согласно (158),

$$c_0 = \frac{b\delta}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)K(k)}, \quad (160)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

модуль которого k равен:

$$k = \frac{a}{b}. \quad (161)$$

На рис. 19 показан график давления $p(x)$ для случая

$$k = \frac{a}{b} = 0,4, \quad \delta = 0,656(\vartheta_1 + \vartheta_2)P.$$

На границах участков контакта давление $p(x)$ обращается в бесконечность, что является следствием принятого нами условия о наличии прямых углов у профиля штампа. Приведённые в этой главе общие формулы дают возможность решить контактную задачу и в том случае, если считать кривизну закраин штампа ограниченной.

При этом мы получим реальную картину распределения давления под штампом, при котором давление будет ограни-

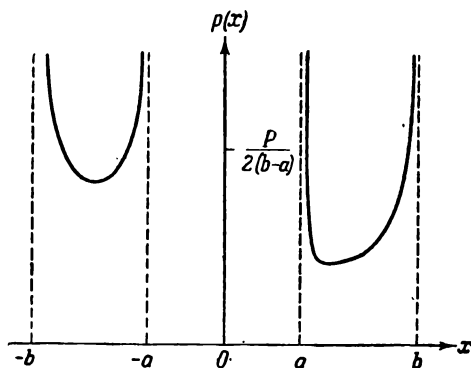


Рис. 19.

ченным везде в области контакта. Ввиду громоздкости выкладок мы детально на этом не останавливаемся.

Рассмотрим теперь тот случай контактной задачи, когда на упругое тело, расположенное в нижней полуплоскости, давят несколько отдельных тел, лежащих в верхней полуплоскости, и заданы силы P_1, P_2, \dots, P_n , прижимающие эти тела.

Если в этом случае под функцией $f_1(x)$ понимать функцию, определяющую в разных интервалах аргумента x конфигурацию каждого из тел, лежащих в верхней полуплоскости, то контактная задача будет решаться тем же интегральным уравнением (148) с той лишь разницей, что постоянная c , входящая в формулу (149), может иметь различные значения на каждом из участков контакта, ибо каждое из сжимаемых тел может совершать при сжатии своё поступательное перемещение.

Как мы показали в главе I, давление $p(x)$, являющееся решением уравнения (148), будет в этом случае определяться той же формулой (150) с той лишь разницей, что коэффициенты полинома $P_{n-1}(x) = c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ будут на этот раз определяться уже не уравнениями (153),

а уравнениями (255) главы I:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-2} c_l \int_{a_m}^{b_m} \frac{x^l dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} = \\ = (-1)^{n-m+1} \tau P_m + P \int_{a_m}^{b_m} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{b_m} \frac{1}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (x-a_m)(x-b_m) \right|}} \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t-a_m)(t-b_m) \right|} \left| \frac{f'(t) dt}{t-x} \right| \right] dx, \quad (162) \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots, n-1,$$

причём

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (163)$$

Рассмотрим простейший пример, в котором на упругую полуплоскость давят два штампа, прижимаемых силами P_1 и P_2 (рис. 20). В этом случае $n=2$, $a_1 = -b$, $b_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = b$,

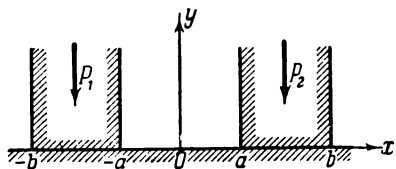


Рис. 20.

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad -b < x < -a \\ \text{и} \quad a < x < b. \quad (164)$$

Как мы показали в главе I, интегральное уравнение (148) при условиях (164) имеет решение:

$$p(x) = \pm \frac{\pi b}{2K(k)} \frac{(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)x}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}, \quad (165)$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad a < |x| < b$$

(см. формулу (267) главы I), где знак плюс берётся при $x < 0$,

знак минус при $x > 0$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k ,

$$P_1 = \int_{-b}^{-a} p(x) dx \quad \text{и} \quad P_2 = \int_a^b p(x) dx \text{ — сжимающие силы.}$$

Формулы (159) и (165) отличаются лишь постоянным слагаемым в числителе дроби, определяющей давление $p(x)$. При $P_1 > P_2$ распределение давления под штампами будет иметь тот же характер, что и на рис. 15.

§ 5. Периодическая контактная задача

Рассмотрим теперь тот случай контактной задачи, когда функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определяющие конфигурацию сжимаемых тел, — периодические с периодом l (рис. 21, а), так что число участков контакта бесконечно велико. Обозначим через (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , ..., (a_n, b_n) ,

$$0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < l, \quad (166)$$

участки контакта сжатых тел в интервале $0 \leq x \leq l$, т. е. в пределах одного периода (будем считать, что начало координат лежит в точке, где контакта между сжатыми телами

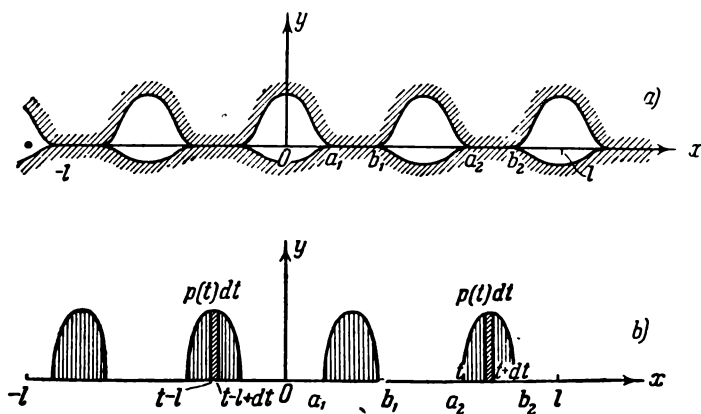


Рис. 21.

нет). Давление $p(x)$ в области контакта будет функцией периодической с периодом l . Рассмотрим действие периодического нормального давления $p(x)$ на нижнюю упругую полуплоскость (рис. 21, б).

Пусть $x = t$ — какая-либо точка интервала $0 < x < l$, в которой на границу упругой среды действует давление $p(t)$. Тогда на интервал $(t, t + dt)$ будет действовать элементарная сила

$p(t) dt$, которая в граничной точке упругой среды с абсциссой x вызовет перемещение dv в направлении оси Oy , равное

$$dv = -\vartheta p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.},$$

согласно формуле (4).

Так как функция $p(x)$ периодическая, в точках $x = t + nl$ ($n = \dots -2, -1, 1, 2, \dots$) на границу упругой среды будет также действовать давление $p(t)$. На интервал $(t + nl, t + nl + dt)$ будет действовать элементарная сила $p(t) dt$, которая в граничной точке упругой среды с абсциссой x вызовет элементарное перемещение:

$$dv = -\vartheta p(t) \ln \frac{1}{|t+nl-x|} dt + \text{const.} = \vartheta p(t) \ln \left| 1 + \frac{t-x}{nl} \right| dt + \text{функц.}(t)$$

Просуммировав элементарные перемещения, возникающие благодаря давлению, действующему на интервалах

$$\dots, (t-2l, t-2l+dt), (t-l, t-l+dt), (t, t+dt), \\ (t+l, t+l+dt), (t+2l, t+2l+dt),$$

получим элементарное перемещение:

$$dv = \vartheta p(t) \left(\dots + \ln \left| 1 - \frac{t-x}{2l} \right| + \ln \left| 1 - \frac{t-x}{l} \right| + \ln |t-x| + \right. \\ \left. + \ln \left| 1 + \frac{t-x}{l} \right| + \ln \left| 1 + \frac{t-x}{2l} \right| + \dots \right) = \vartheta p(t) \ln |(t-x) \left[1 - \frac{(t-x)^2}{l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{4l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{9l^2} \right] \dots| dt + \text{функц.}(t) \quad (167)$$

Как известно, функция $\sin u$ может быть представлена бесконечным произведением:

$$\sin u = u \left(1 - \frac{u^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{u^2}{4\pi^2} \right) \left(1 - \frac{u^2}{9\pi^2} \right) \dots \quad (168)$$

Полагая в (168) $u = \frac{\pi(t-x)}{l}$, найдём:

$$\sin \frac{\pi(t-x)}{l} = \\ = \frac{\pi}{l} (t-x) \left[1 - \frac{(t-x)^2}{l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{4l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{9l^2} \right] \dots,$$

откуда

$$(t-x) \left[1 - \frac{(t-x)^2}{l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{4l^2} \right] \left[1 - \frac{(t-x)^2}{9l^2} \right] \dots = \\ = \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi(t-x)}{l}. \quad (169)$$

Подставляя (169) в (167), найдём:

$$dv = \vartheta p(t) \ln \frac{l}{\pi} \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right| dt + \text{функц.}(t),$$

или, что то же самое,

$$dv = \vartheta p(t) \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right| dt + \text{функц.}(t). \quad (170)$$

Если в интервале $0 \leq x \leq l$ контакт между сжатыми телами осуществляется вдоль участков оси $Ox(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, то согласно (170) граничная точка с абсциссой x , принадлежащая телу, расположенному в нижней полуплоскости, получит упругое перемещение в направлении оси Oy :

$$-v_2 = \vartheta_2 \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right| dt + \text{const.}, \quad (171)$$

а соответствующая точка, принадлежащая телу, лежащему в верхней полуплоскости, — перемещение

$$v_1 = -\vartheta_1 \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right| dt + \text{const.} \quad (172)$$

Подставляя (171) и (172) в (3), получим для определения давления $p(x)$ интегральное уравнение

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right|} dt = c - f_1(x) - f_2(x), \quad (173)$$

$$a_m < x < b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

где c — некоторая постоянная, или

$$\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p(t) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(t-x)}{l} \right|} dt = f(x), \quad (174)$$

причем $a_m < x < b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), где

$$f(x) = \frac{c - f_1(x) - f_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (175)$$

Полагая в (174)

$$t = \frac{l}{2\pi} \varphi, \quad x = \frac{l}{2\pi} \vartheta, \quad (176)$$

получим уравнение

$$\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} p \left(\frac{l\varphi}{2\pi} \right) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = \frac{2\pi}{l} f \left(\frac{l\vartheta}{2\pi} \right), \quad (177)$$

причем $\alpha_m < \vartheta < \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), где

$$\alpha_m = \frac{2\pi}{l} a_m, \quad \beta_m = \frac{2\pi}{l} b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (178)$$

В главе I мы показали, что уравнение (268) имеет решение (318), где постоянные $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ определяются уравнениями (319), (322) и (327) и

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(\varphi) d\varphi.$$

Таким образом, уравнение (177) будет иметь решение:

$$p\left(\frac{l\vartheta}{2\pi}\right) = -\frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right| \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} \times$$

$$\times f'\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi + (-1)^{n-m+1} \frac{\sum_{m=0}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} \quad (179)$$

$$\alpha_m < \vartheta < \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

где постоянные $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_4 + \gamma_6 - \dots &= \frac{P^*}{2\pi} \sin \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m + \beta_m}{4} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \left(\sin \sum_{m=1}^n \frac{\beta_m}{2} \right) \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) d\varphi, \\ -\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_5 + \gamma_7 - \dots &= \frac{P^*}{2\pi} \cos \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m + \beta_m}{4} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \left(\cos \sum_{m=1}^n \frac{\beta_m}{2} \right) \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) d\varphi, \end{aligned} \right\} (180)$$

где

$$P^* = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) d\varphi, \quad (181)$$

и уравнениями

$$\sum_{m=0}^n \gamma_m \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{\sin^{n-m} \frac{\vartheta}{2} \cos^m \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2} \sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2} \right|}} =$$

$$= (-1)^{n-k} \left[2 \frac{f\left(\frac{l\alpha_{k+1}}{2\pi}\right) - f\left(\frac{l\beta_{k+1}}{2\pi}\right)}{l} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\vartheta - \beta_m}{2}}{\sin \frac{\vartheta - \alpha_m}{2}} \right|} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_m}{2}}{\sin \frac{\varphi - \beta_m}{2}} \right|} f'\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\varphi \right) d\vartheta \right], \quad (182)$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Полагая в (181) $\varphi = \frac{2\pi}{l} t$, найдём:

$$P^* = \frac{2\pi}{l} \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(t) dt = \frac{2\pi}{l} P, \quad (183)$$

где

$$P = \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} p(t) dt \quad (184)$$

— сжимающая сила, приходящаяся на интервал $0 \leq x \leq l$, т. е. на один период. Подставляя (183) в (180) и полагая в (179), (180) и (182) $\varphi = \frac{2\pi}{l} t$, $\vartheta = \frac{2\pi}{l} x$, найдём:

$$p(x) =$$

$$= -\frac{1}{\pi l} \sqrt{\left| \frac{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (x - b_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (x - a_m)} \right|} \sum_{m=1}^n \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \sqrt{\left| \frac{\prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} \times$$

$$\times f'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (t - x) dt +$$

$$+ (-1)^{n-m+1} \frac{\sum_{m=0}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\pi x}{l} \cos^m \frac{\pi x}{l}}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (x - a_m) \sin \frac{\pi}{l} (x - b_m) \right|}}, \quad (185)$$

$$a_m < x < b_m \quad (m=1, 2, \dots, n),$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_0 + \gamma_2 - \gamma_4 + \gamma_6 - \dots &= \frac{P}{l} \sin \sum_{m=1}^n \frac{\pi}{2l} (a_m + b_m) + \\ + \frac{1}{\pi l} \left(\sin \sum_{m=1}^n \frac{\pi b_m}{l} \right) \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} f'(t) dt, \\ -\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_5 + \gamma_7 - \dots &= \frac{P}{l} \cos \sum_{m=1}^n \frac{\pi}{2l} (a_m + b_m) + \\ + \frac{1}{\pi l} \left(\cos \sum_{m=1}^n \frac{\pi b_m}{l} \right) \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} f'(t) dt, \end{aligned} \right\} (186)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \gamma_m \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin^{n-m} \frac{\pi x}{l} \cos^m \frac{\pi x}{l} dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (x - a_m) \sin \frac{\pi}{l} (x - b_m) \right|}} &= \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{\pi} [f(a_{k+1}) - f(b_k) + \\ + \frac{1}{l} \int_{b_k}^{a_{k+1}} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (x - b_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (x - a_m)} \right|} \left(\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} \times \right. \\ \left. \times f'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (t - x) dt \right) dx], \quad k=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (187)$$

Для того чтобы давление $p(x)$, определяемое формулой (185), было ограниченным везде в области контакта, включая точки $x = a_m$ и $x = b_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$), должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\pi b_k}{l} \cos^m \frac{\pi b_k}{l} &= 0, \\ \sum_{m=0}^n \gamma_m \sin^{n-m} \frac{\pi a_k}{l} \cos^m \frac{\pi a_k}{l} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{n-k+1} \frac{1}{\pi l} \left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (a_k - b_m) \right| \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} \times \\
 &\quad \times f'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (t - a_k) dt, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (188)
 \end{aligned}$$

Формулы (185), (186), (187) и (188) полностью решают рассматриваемую в этой главе контактную задачу, определяя область контакта и давление $p(x)$. Уравнения (186), (187) и (188) определяют абсциссы начал и концов участков контакта $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ и постоянные $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, после чего формула (185) определяет давление $p(x)$ в области контакта.

Если на нижнюю упругую полуплоскость в интервале $0 \leq x \leq l$, т. е. в пределах одного периода, дают n отдельных тел и заданы сжимающие силы P_1, P_2, \dots, P_n , действующие на каждое из этих тел, то вместо уравнений (187) мы будем иметь уравнения

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m=0}^n \gamma_m \int_{a_k}^{b_k} \frac{\sin^{n-m} \frac{\pi x}{l} \cos^m \frac{\pi x}{l} dx}{\sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \sin \frac{\pi}{l} (x - a_m) \sin \frac{\pi}{l} (x - b_m) \right|}} = \\
 &= (-1)^{n-k+1} \left[P_k + \frac{1}{\pi l} \int_{a_k}^{b_k} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (x - b_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (x - a_m)} \right|} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n \frac{\sin \frac{\pi}{l} (t - a_m)}{\sin \frac{\pi}{l} (t - b_m)} \right|} f'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (t - x) dt \right) dx \right], \quad (189) \\
 &\quad k=1, 2, \dots, n-1,
 \end{aligned}$$

выражающие согласно (185) условия

$$\int_{a_k}^{b_k} p(x) dx = P_k \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

а в уравнениях (186) под P надлежит в этом случае понимать сумму

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (190)$$

Заметим ещё, что если какие-либо из границ участков контакта заранее предопределяются конфигурацией сжимаемых тел, как в случае давления штампа с прямыми углами на упругую полуплоскость, то соответствующие из уравнений (188) должны быть отброшены.

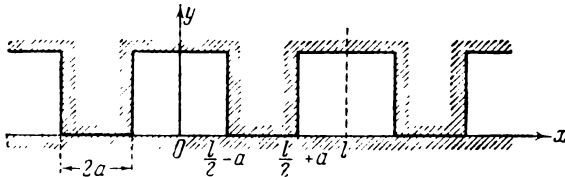


Рис. 22.

В заключение этого параграфа рассмотрим простейшие примеры.

1) Рассмотрим давление на нижнюю упругую полуплоскость штампа, имеющего очертания, показанные на рис. 22. В этом случае $n=1$, $a_1 = \frac{l}{2} - a$, $a_2 = \frac{l}{2} + a$, $f(x) = \text{const.}$ при $\frac{l}{2} - a < x < \frac{l}{2} + a$, и уравнение (177) принимает вид:

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} p \left(\frac{l\varphi}{2\pi} \right) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = \text{const.} \quad (191)$$

при $\pi - \alpha < \vartheta < \pi + \alpha$,

$$\alpha = \frac{2\pi a}{l}.$$

В главе I мы показали, что уравнение

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} p(\varphi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = \text{const.}, \quad \pi - \alpha < \vartheta < \pi + \alpha,$$

имеет решение:

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{P^* \sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2\pi \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}}, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha$$

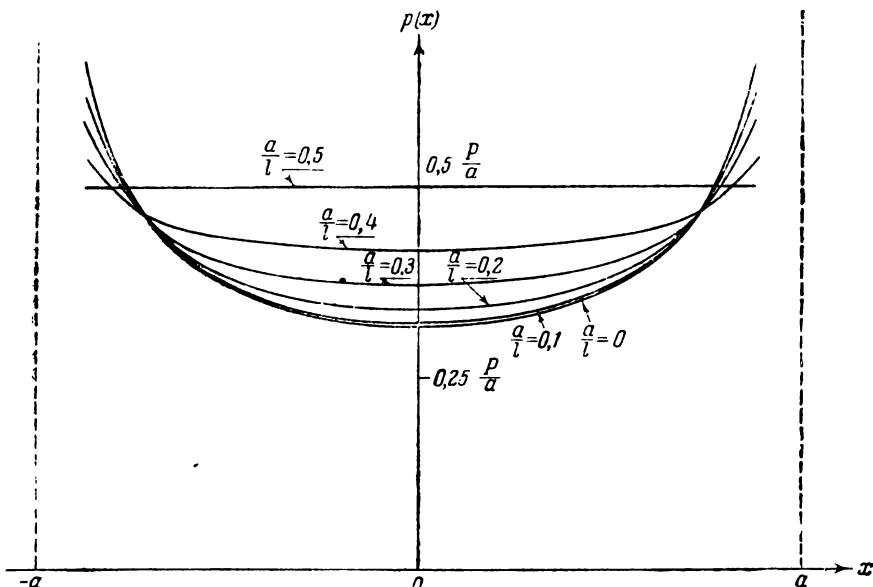
(см. формулу (338) главы I). Таким образом, уравнение (191) имеет решение:

$$p \left(\frac{l}{2} \mp \frac{l\vartheta}{2\pi} \right) = \frac{P^* \sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2\pi \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}}, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha. \quad (192)$$

Подставляя (183) в (192) и полагая согласно (176) и (178) $\theta = \frac{2\pi}{l}x$, $\alpha = \frac{2\pi}{l}a$, найдём:

$$p\left(\frac{l}{2} + x\right) = \frac{P\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{l}}{l\sqrt{\cos\frac{2\pi x}{l} - \cos\frac{2\pi a}{l}}}, \quad -a < x < a. \quad (19.)$$

На рис. 23 показаны графики давления p под штампом, построенные в соответствии с формулой (193) для различных

Рис. 23_a

значений отношения $\frac{a}{l}$. При $l = 2a$ ($\frac{a}{l} = 0,5$), как видно из рис. 22, основания штампов сливаются, и мы приходим к равномерно распределённому под штампом давлению $p = \frac{P}{2a}$. Когда $l \rightarrow \infty$ ($\frac{a}{l} \rightarrow 0$), мы приходим к случаю одного участка контакта, рассмотренному в § 3, и получим тот же график давления $p(x)$, что и на рис. 13.

2) Пусть теперь (рис. 24)

$$f_1(x) = \frac{Al^2}{2\pi^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}, \quad f_2(x) = 0. \quad (194)$$

Заметим, что в этом случае $f_1''\left(\frac{l}{2}\right) = A$, т. е. постоянная A

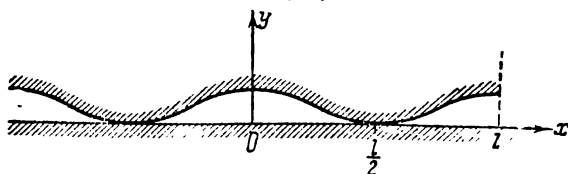


Рис. 24.

в формуле (194) определяет кривизну в точке касания. Подставляя (194) в (175), найдём:

$$f(x) = -\frac{Al^2}{2\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \text{const.},$$

и уравнение (177) будет для этого случая иметь вид:

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} p\left(\frac{l\varphi}{2\pi}\right) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = -\frac{Al}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \text{const.}, \quad (195)$$

$$\pi - \alpha < \vartheta < \pi + \alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi a}{l},$$

если через a обозначить полуширину участка контакта.

В главе I мы показали, что уравнение

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} p(\varphi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right|} d\varphi = -A \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \text{const.}$$

имеет решение:

$$p(\pi + \vartheta) = \frac{\sqrt{2}A}{2\pi} \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P}{A}}$$

(см. формулы (354) и (355) главы I).

Таким образом, уравнение (195) будет иметь решение:

$$p\left(\frac{l}{2} + \frac{l\vartheta}{2\pi}\right) = \frac{Al\sqrt{2}}{2\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cos \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\cos \vartheta - \cos \alpha}, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \quad (196)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\pi P^*(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{Al}}. \quad (197)$$

Подставляя в (197) (183) и полагая в (196) и (197) $\vartheta = \frac{2\pi}{l} x$,

$\alpha = \frac{2\pi}{l} a$ согласно (176) и (178), найдём:

$$p\left(\frac{l}{2} + x\right) = \frac{Al\sqrt{2}}{2\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cos \frac{\pi x}{l} \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{l} - \cos \frac{2\pi a}{l}}, \quad (198)$$

$$-a < x < a,$$

$$a = \frac{l}{\pi} \arcsin \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{2P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}}. \quad (199)$$

Формула (199) определяет полуширину участка контакта a ; формула (198) — давление p в области контакта.

Как видно из формулы (199), при

$$l = \pi \sqrt{\frac{2P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}} = l_0, \quad (200)$$

$a = \frac{l_0}{2}$, т. е. происходит полное соприкосновение сжимаемых тел вдоль всей оси Ox . Пользуясь обозначением (200)

$$\pi \sqrt{\frac{2P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}} = l_0,$$

можно формулам (198) и (199) придать вид:

$$p\left(\frac{l}{2} + x\right) = \sqrt{2} \frac{l}{l_0} \cos \frac{\pi x}{l} \sqrt{\cos \frac{2\pi x}{l} - \cos \frac{2\pi a}{l} \frac{P}{l_0}}, \quad (201)$$

$$-a < x < a, \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{l_0}{l}.$$

Задавая различные значения отношения a/l и вычисляя далее по формулам (201) сначала l_0/l , а затем p , получаем графики давления p в области контакта, изображённые на рис. 25. Эти графики показывают зависимость давления p в области контакта от периода l при фиксированном l_0 , т. е. согласно (200) при фиксированных упругих постоянных, сжимающей силе P и при фиксированной постоянной A , т. е. при фиксированной кривизне в точке первоначального контакта. В предельном случае, когда $l = l_0$, $a/l = 0,5$ (полное соприкосновение упругих тел вдоль всей оси Ox) давление p меняется по синусоиде. В другом предельном случае, когда $l \rightarrow \infty$, $a/l \rightarrow 0$, мы приходим к первоначальному касанию сжимаемых тел в одной точке и получаем распределение давления в области кон-

такта по эллипсу, ранее уже полученное нами в § 2. Кривые на рис. 25 дают также ясное представление о взаимном влиянии давлений на соседних участках.

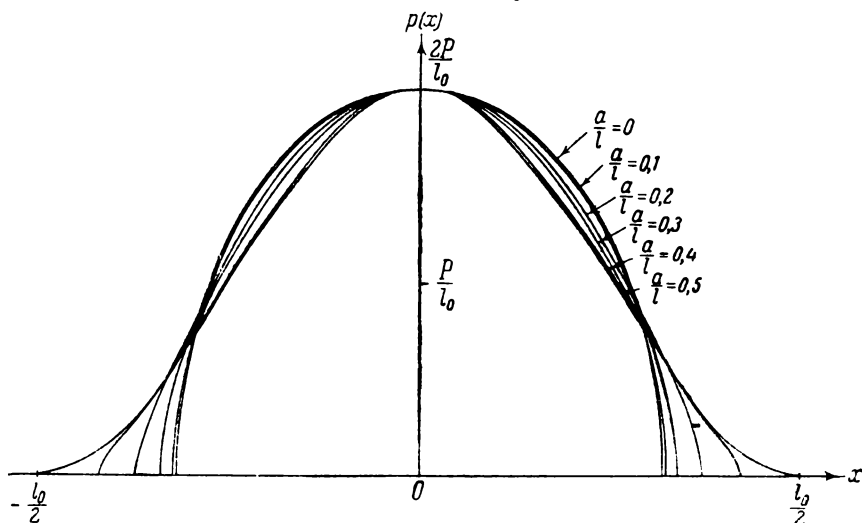


Рис. 25.

§ 6. Контактная задача при наличии сил трения

До сих пор мы предполагали, что между сжимаемыми телами отсутствует трение и в области контакта на сжатые тела действует лишь нормальное давление $p(x)$. Рассмотрим теперь тот случай, когда между сжимаемыми телами имеет место трение¹⁾. Будем предполагать, что сжимаемые тела находятся на пороге равновесия и в области контакта между нормальными и касательными напряжениями имеет место соотношение:

$$\tau_{xy} = k\sigma_y, \quad (202)$$

где k — коэффициент трения. Таким образом, в точке контакта с абсциссой x при наличии нормального давления $p(x)$ будет также действовать касательное усилие $t(x) = kp(x)$. Благодаря наличию этих касательных усилий граничные точки сжимаемых тел с абсциссой x совершат дополнительные упругие перемещения в направлении оси Oy , которые мы обозначим через v_1^* и $-v_2^*$.

¹⁾ Эта задача была решена Н. И. Мусхелишвили, Л. А. Галиным и отчасти Н. И. Глаголевым. См. академик Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения; Л. А. Галин, Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости, Доклады АН СССР, т. XXIX, № 3, 1943; Н. И. Глаголев, Упругие напряжения вдоль основания плотины, Доклады АН СССР, т. XXXIV, № 7, 1942.

Как известно из теории упругости, эти перемещения будут связаны с касательным усилием $t(x) = kp(x)$ соотношениями

$$\frac{dv_1^*}{dx} = \frac{t(x)}{G_1}, \quad \frac{dv_2^*}{dt} = \frac{t(x)}{G_2}, \quad (203)$$

или

$$\frac{dv_1^*}{dx} = \frac{k}{G_1} p(x), \quad \frac{dv_2^*}{dx} = \frac{k}{G_2} p(x), \quad (204)$$

где G_1 и G_2 — модули сдвигов сжимаемых материалов. Интегрируя (204) по x , найдём:

$$v_1^* = \frac{k}{G_1} \int_0^x p(t) dt + \text{const.}, \quad v_2^* = \frac{k}{G_2} \int_0^x p(t) dt + \text{const.} \quad (205)$$

Чтобы получить интегральное уравнение задачи, надо в условии (3) вместо перемещений v_1 и v_2 , определяемых формулами (9) и (10), подставить перемещения $v_1 + v_1^*$ и $v_2 + v_2^*$. Получим вместо интегрального уравнения (12) уравнение

$$k \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} \int_0^x p(t) dt + (\vartheta_1 + \vartheta_2) \int_s^x p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \\ = c - f_1(x) - f_2(x) \text{ на } S, \quad (206)$$

или

$$\int_0^x p(t) dt + \nu \int_s^x p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \nu f(x) \text{ на } S, \quad (207)$$

где

$$\nu = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) G_1 G_2}{k(G_1 + G_2)}, \quad (208)$$

$$f(x) = \frac{c - f_1(x) - f_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (209)$$

Для простоты будем в дальнейшем предполагать, что область контакта S складывается из одного участка. Если через $2a$ обозначить длину этого участка и расположить начало координат в центре участка контакта, то уравнение (206) будет иметь вид:

$$\int_0^x p(t) dt + \nu \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \nu f(x), \quad -a < x < a. \quad (210)$$

Пользуясь формулами (391) и (392) главы I для решения интегрального уравнения (356) главы I, получим следующее

решение уравнения (210):

$$p(x) = \frac{\sin \pi\gamma \cos \pi\gamma}{\pi} f'(x) - \frac{\cos^2 \pi\gamma \int_{-a}^a \frac{(a+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt}{t-x} - P \cos \pi\gamma}{\pi (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}}, \quad (211)$$

$$-a < x < a,$$

где

$$P = \int_{-a}^a p(t) dt, \quad (212)$$

т. е. представляет собой сжимающую силу, а

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\pi\nu}. \quad (213)$$

Подставляя (208) в (213), найдём:

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k(G_1 + G_2)}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)G_1G_2}. \quad (214)$$

Для того чтобы давление $p(x)$, определяемое формулой (211), было ограниченным везде в области контакта, включая точки $x = -a$ и $x = a$, должны выполняться условия

$$\cos \pi\gamma \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{\frac{1}{2}+\gamma} f'(t) dt = -\pi P \quad (215)$$

и

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{\frac{1}{2}+\gamma} f'(t) dt = - \int_{-a}^a \left(\frac{a-t}{a+t}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt. \quad (216)$$

Условию (216) можно придать вид:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\gamma \left(\frac{\sqrt{a+t}}{\sqrt{a-t}} + \frac{\sqrt{a-t}}{\sqrt{a+t}}\right) f'(t) dt = 2a \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\gamma \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = 0,$$

или

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\gamma \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = 0. \quad (217)$$

Пользуясь соотношением (216), условию (215) можно придать вид:

$$\cos \pi\gamma \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^\gamma \left(\frac{\sqrt{a+t}}{\sqrt{a-t}} - \frac{\sqrt{a-t}}{\sqrt{a+t}}\right) f'(t) dt = -2\pi P.$$

ИЛИ

$$\cos \pi \gamma \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{t f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = -\pi P. \quad (218)$$

Пользуясь соотношениями (217) и (218), найдём:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{(a+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-t)^{\frac{1}{2}-\gamma} f'(t) dt}{t-x} &= \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-x)} = \\ &= (a^2-x^2) \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-x)} - x \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}} - \\ &- \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{t f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = (a^2-x^2) \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-x)} + \frac{\pi P}{\cos \pi \gamma}. \end{aligned} \quad (219)$$

Подставляя (219) в (211), найдём:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\sin \pi \gamma \cos \pi \gamma}{\pi} f'(x) - \frac{\cos^2 \pi \gamma}{\pi^2} (a+x)^{\frac{1}{2}-\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}+\gamma} \times \\ &\times \int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\gamma} \frac{f'(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-x)}, \quad -a < x < a. \end{aligned} \quad (220)$$

Условие (217) предопределяет выбор начала координат, т. е. определяет положение участка контакта, уравнение (218) определяет полуширину участка контакта a , формула (220) определяет давление $p(x)$ в области контакта. Таким образом, формулы (214), (217), (218) и (220) полностью решают задачу, определяя область контакта и давление $p(x)$. При $k=0$, т. е. при отсутствии трения, $\gamma=0$ согласно (214). Полагая $\gamma=0$ в (217), (218) и (220), получим формулы (32), (33) и (34), выведенные нами ранее в предположении об отсутствии трения.

Если область контакта заранее предопределена конфигурацией сжимаемых тел, условия (215) и (216) отпадают, и давление $p(x)$ непосредственно определяется формулой (211). Так, например, если штамп с прямыми углами, находящийся под действием нормальной силы P и касательной силы T , давит на упругую полуплоскость (рис. 26а), то $f(x) = \text{const.}$ при $-a < x < a$, и формула (211) даёт:

$$p(x) = \frac{P \cos \pi \gamma}{\pi (a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}}, \quad -a < x < a. \quad (221)$$

На рис. 266 показано распределение давления $p(x)$ под штампом для $\gamma = 0,05$. При отсутствии трения, т. е. при $\gamma = 0$, форма

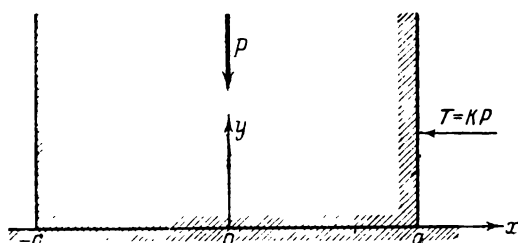


Рис. 26а.

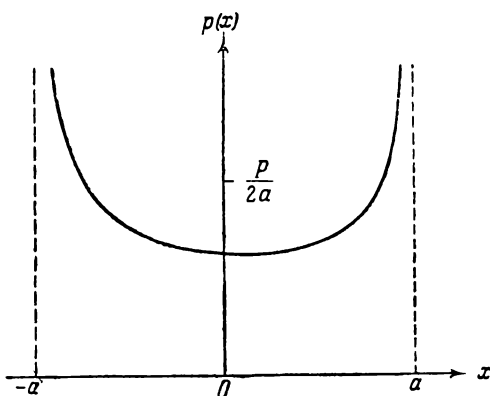


Рис. 26б.

мула (221) переходит в ранее выведенную нами для этого случая формулу (116).

§ 7. Сжатие упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, радиусы которых почти равны

Рассмотрим теперь задачу о сжатии двух упругих тел, из которых одно имеет форму кругового цилиндра, а другое имеет круговой цилиндрический вырез (рис. 27). Обозначим через r_1 и r_2 радиусы цилиндрических поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела. Если эти радиусы весьма мало отличаются один от другого, то при сжатии упругих тел контакт между их поверхностями может распространиться на значительную часть этих поверхностей, и таким образом, теория сжатия, изложенная нами в § 1 этой главы, будет уже неприменимой. Ниже

мы выводим уравнение, определяющее в этом случае распределение давления по поверхности сжатия.

Пусть A_1 и A_2 — две точки упругих тел, соприкасающиеся при сжатии (рис. 27 и 28), A — точка первоначального касания сжимаемых тел, φ — угол AO_1A_1 . Пусть далее $\overline{A_1A'_1}$ и $\overline{A_2A'_2}$ — упругие перемещения точек A_1 и A_2 . Тогда отрезок $\overline{A'_1A'_2}$ будет представлять собой сближение упругих тел при сжатии, вследствие которого и осуществляется контакт между точками A_1 и A_2 . Мы предполагаем при этом, что равнодействующие сжимающих сил проходят через точку первоначального касания сжимаемых тел A и центры O_1 и O_2 , так что относительного поворота сжимаемых тел не происходит и возникает лишь относительное поступательное перемещение тел при сжатии.

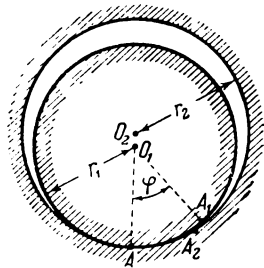


Рис. 27.

Обозначим далее через u_{1r} и u_{2r} нормальные упругие перемещения точек A_1 и A_2 (отрезки $\overline{A_1A'_1}$ и $\overline{A_2A'_2}$ на рис. 28) и через α — сближение тел при сжатии. Ввиду малости упругих перемещений можно отрезок \overline{BC} на рис. 28 принять равным отрезку $\overline{A_2A'_2}$. Тогда из рис. 28 найдём:

$$u_{1r} + u_{2r} = \alpha \cos \varphi - \overline{A_1B}. \quad (222)$$

Вычислим теперь отрезок $\overline{A_2B}$. Так как точка A_1 лежит на внутренней, а точка B на внешней цилиндрической поверхности, $\overline{O_1A_1} = r_1$, $\overline{O_2B} = r_2$ (рис. 29). Как видно из рис. 29, можно приближённо положить

$$\overline{O_2B} - \overline{O_1B} = \overline{O_1O_2} \cos \varphi, \quad (223)$$

так как разность радиусов $r_2 - r_1 = \overline{O_1O_2}$ по предположению весьма мала. Соотношению (223) можно придать вид:

$$r_2 - (r_1 + \overline{A_1B}) = (r_2 - r_1) \cos \varphi,$$

откуда

$$\overline{A_1B} = (r_2 - r_1) (1 - \cos \varphi). \quad (224)$$

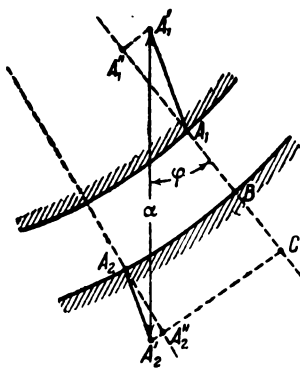


Рис. 28.

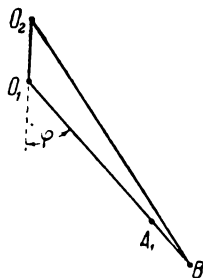


Рис. 29.

Подставляя (224) в (222), получим соотношение

$$u_{1r} + u_{2r} = \alpha \cos \varphi - (r_2 - r_1) (1 - \cos \varphi), \quad (225)$$

которое должно иметь место в области контакта. Будем в дальнейшем предполагать, что поверхности сжимаемых тел абсолютно гладкие. Тогда на поверхность контакта будет действовать

только нормальное давление, которое мы обозначим через $p(\varphi)$. Выразим теперь перемещения u_{1r} и u_{2r} , входящие в соотношение (225), через искомого давление $p(\varphi)$. Рассмотрим с этой целью действие сосредоточенного давления на упругое тело, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью (рис. 30). Как известно, в этом случае силы P , показанные на рис. 30, вызывают в упругом теле простые ради-

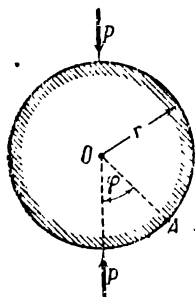


Рис. 30.

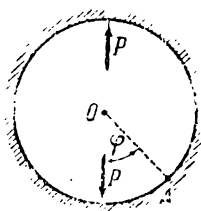


Рис. 31.

альные распределения напряжений и равномерное растяжение¹⁾ $\frac{P}{\pi r}$. Под действием этих сил точка A совершает радиальное упругое перемещение в направлении центра O :

$$u_r = P \left[-2\vartheta \left(1 + \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi|}{2} \right) + x \sin |\varphi| \right], \quad (226)$$

где

$$\vartheta = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)}, \quad \text{C}$$

$$x = \frac{1}{4(\lambda + \mu)},$$

λ и μ — упругие постоянные сжимаемого тела. Аналогично точка A бесконечного упругого тела с круговым цилиндрическим вырезом под действием сил P , показанных на рис. 31, совершает радиальное упругое перемещение в направлении от центра O :

$$u_r = P \left(-2\vartheta \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi|}{2} + x \sin |\varphi| \right). \quad (227)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, 1937, стр. 118.

Вычислим теперь перемещение u_{1r} , входящее в соотношение (225). Если $p(\varphi)$ нормальное давление на поверхности контакта, то на элемент KL внутреннего цилиндра (рис. 32) будет действовать сила $p(\varphi')r_1 d\varphi'$. Совместно с такой же силой, приложенной к диаметрально противоположной точке цилиндра, эта сила вызовет в точке A' радиальное перемещение du_{1r} , которое согласно (226) будет равно:

$$du_{1r} = p(\varphi') r_1 \left\{ -2\vartheta_1 \left[1 + \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} \right] + \kappa_1 \sin |\varphi - \varphi'| \right\} d\varphi'. \quad (228)$$

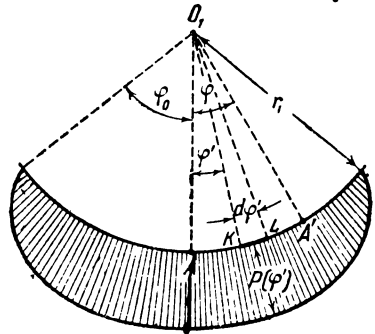


Рис. 32.

Пусть далее, как показано на рис. 32, области контакта соответствует изменение угла φ в пределах от $-\varphi_0$ до φ_0 . Тогда полное радиальное перемещение точки A' мы найдём, проинтегрировав выражение для элементарного перемещения du_{1r} по φ' в пределах от $-\varphi_0$ до φ_0 :

$$u_{1r} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') r_1 \left\{ -2\vartheta_1 \left[1 + \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} \right] + \kappa_1 \sin |\varphi - \varphi'| \right\} d\varphi'. \quad (229)$$

При выводе формулы (229) мы предположили, что внешние сжимающие силы, действующие на внутренний цилиндр, распределены по его поверхности симметрично тому давлению, которое они вызывают в области контакта. Это предположение допустимо вследствие того, что давление в области контакта мало зависит от того, как приложены внешние сжимающие силы, и при решении контактной задачи можно отвлечься от распределения внешних сжимающих сил, подобно тому, как мы это сделали в § 1 этой главы при выводе основного уравнения контактной задачи.

Буквально повторяя рассуждения, проведённые нами при выводе формулы (229), найдём в соответствии с (227) следующее выражение для перемещения u_{2r} :

$$u_{2r} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') r_2 \left[-2\vartheta_2 \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} + \kappa_2 \sin |\varphi - \varphi'| \right] d\varphi'. \quad (230)$$

Подставляя (229) и (230) в (225), получим уравнение¹⁾

$$\begin{aligned}
 & -2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \\
 & + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin|\varphi - \varphi'| d\varphi' - 2\vartheta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = \\
 & = \alpha \cos \varphi - (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi), \\
 & \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0,
 \end{aligned} \tag{231}$$

где

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}, & \vartheta_2 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_2(\lambda_1 + \mu_2)}, \\
 x_1 &= \frac{1}{4(\lambda_1 + \mu_1)}, & x_2 &= \frac{1}{4(\lambda_2 + \mu_2)},
 \end{aligned}$$

λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 — упругие постоянные сжимаемых тел. Рассмотрим теперь функцию угла φ :

$$\begin{aligned}
 J(\varphi) &= 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \\
 & + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{\varphi}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \right].
 \end{aligned} \tag{232}$$

Вычислим производную $J'(\varphi)$. Так как при $\varphi > \varphi'$

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} = \frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{1}{\sin(\varphi - \varphi')}$$

и при $\varphi < \varphi'$

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} = \frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} = \frac{1}{\sin(\varphi - \varphi')},$$

будем иметь:

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} = \frac{1}{\sin|\varphi - \varphi'|}. \tag{233}$$

¹⁾ Для численного решения уравнения (231) очень удобен метод конечных разностей (см. Приложение 2).

Принимая во внимание формулу (23'), из (232) найдём:

$$J'(\varphi) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \right. \\ \left. + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' \right] - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') d\varphi' + \right. \\ \left. + \int_{\varphi}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi' - \varphi) d\varphi' - 2p(\varphi) \right],$$

откуда

$$-2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin|\varphi - \varphi'| d\varphi' = \\ = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' + 2(x_1 r_1 + x_2 r_2) p(\varphi) - J'(\varphi). \quad (234)$$

Подставляя (234) в (231), найдём:

$$2\vartheta_2 r_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' + 2(x_1 r_1 + x_2 r_2) p(\varphi) - J'(\varphi) = \\ = \alpha \cos \varphi - (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi),$$

откуда

$$J'(\varphi) = 2(x_1 r_1 + x_2 r_2) p(\varphi) + r_2 - r_1 + \\ + 2\vartheta_2 r_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' - (r_2 - r_1 + \alpha) \cos \varphi. \quad (235)$$

Интегрируя обе части равенства (235) по φ , найдём:

$$J(\varphi) = 2(x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_0^{\varphi} p(\varphi') d\varphi' + \\ + \left[r_2 - r_1 + 2\vartheta_2 r_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi \right] \varphi - (r_2 - r_1 + \alpha) \sin \varphi + 2\beta, \quad (236)$$

где β — произвольная постоянная.

Дифференцируя обе части соотношения (231) по φ и принимая во внимание (233), получим:

$$2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' - \right. \\ \left. - \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \operatorname{ctg}(\varphi - \varphi') d\varphi + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \frac{d}{d\varphi} \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') d\varphi' + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\varphi}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi' - \varphi) d\varphi' \right] \right] = -(\alpha + r_2 - r_1) \sin \varphi,$$

откуда

$$2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \left[\int_{-\varphi_0}^{\varphi} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' - \int_{\varphi}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \right] = \\ = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \operatorname{ctg}(\varphi - \varphi') d\varphi' - (\alpha + r_2 - r_1) \sin \varphi. \quad (237)$$

Подставляя (237) в (232), найдём:

$$J(\varphi) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \operatorname{ctg}(\varphi - \varphi') d\varphi' - (\alpha + r_2 - r_1) \sin \varphi. \quad (238)$$

Подставляя (238) в (236), получим уравнение

$$(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \operatorname{ctg}(\varphi - \varphi') d\varphi' - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \times \\ \times \int_{\varphi}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = \beta + \gamma_0 \varphi, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0, \quad (239)$$

где

$$\gamma_0 = \vartheta_2 r_2 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' + \frac{1}{2} (r_2 - r_1). \quad (240)$$

Произведём в уравнении (239) замену переменных, положив

$$\operatorname{tg} \varphi = x, \quad \operatorname{tg} \varphi' = t. \quad (241)$$

Находим:

$$\operatorname{ctg}(\varphi - \varphi') = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{1 + tx}{x - t}, \quad d\varphi' = \frac{dt}{1 + t^2},$$

и, таким образом, уравнение (239) примет вид:

$$\begin{aligned} & (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-a}^a p(\operatorname{arctg} t) \frac{1 + tx}{(1 + t^2)(x - t)} dt - \\ & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_0^x \frac{p(\operatorname{arctg} t)}{1 + t^2} dt = \beta + \gamma_0 \operatorname{arctg} x, \quad -a < x < a, \end{aligned} \quad (242)$$

где

$$a = \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (243)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{1 + tx}{(x - t)(1 + t^2)} = \frac{1}{x - t} + \frac{t}{1 + t^2},$$

можно придать уравнению 242 (вид):

$$\begin{aligned} & (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-a}^a \frac{p(\operatorname{arctg} t)}{x - t} dt - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_0^x \frac{p(\operatorname{arctg} t)}{1 + t^2} dt = \\ & = \beta - (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-a}^a \frac{p(\operatorname{arctg} t) t}{1 + t^2} dt + \gamma_0 \operatorname{arctg} x, \quad -a < x < a. \end{aligned} \quad (244)$$

Полагая далее

$$\int_0^x \frac{p(\operatorname{arctg} t)}{1 + t^2} dt = g_0(x), \quad (245)$$

найдем:

$$p(\operatorname{arctg} x) = (1 + x^2) g'_0(x). \quad (246)$$

Подставляя (246) в (244), будем иметь:

$$\begin{aligned} & (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-a}^a \frac{1 + t^2}{x - t} g'_0(t) dt - (x_1 r_1 + x_2 r_2) g_0(x) = \\ & = \beta - (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-a}^a g'_0(t) t dt + \gamma_0 \operatorname{arctg} x, \quad -a < x < a. \end{aligned} \quad (247)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{1 + t^2}{x - t} = \frac{1 + x^2}{x - t} - t - x,$$

придадим уравнению (247) вид:

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) (1+x^2) \int_{-a}^a \frac{g'_0(t) dt}{x-t} - (x_1 r_1 + x_2 r_2) g_0(x) = \\ = \beta + (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) x \int_{-a}^a g'_0(t) dt + \gamma_0 \operatorname{arctg} x, \quad -a < x < a. \end{aligned} \quad (248)$$

Полагая далее в уравнении (248)

$$g_0(x) = g(x) - \frac{\beta}{x_1 r_1 + x_2 r_2}, \quad (249)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) (1+x^2) \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{x-t} - (x_1 r_1 + x_2 r_2) g(x) = \\ = (\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) x [g(a) - g(-a)] + \gamma_0 \operatorname{arctg} x, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} + \frac{x_1 r_1 + x_2 r_2}{(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)(1+x^2)} g(x) = \\ = \frac{[g(-a) - g(a)] x}{1+x^2} - \gamma \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}, \quad -a < x < a, \end{aligned} \quad (250)$$

где

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2}. \quad (251)$$

Подставляя (249) в (246), найдём:

$$p(\operatorname{arctg} x) = (1+x^2) g'(x). \quad (252)$$

Отсюда

$$g(a) - g(-a) = \int_{-a}^a g'(t) dt = \int_{-a}^a \frac{p(\operatorname{arctg} t) dt}{1+t^2},$$

или, полагая $t = \operatorname{tg} \varphi'$,

$$g(a) - g(-a) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi'. \quad (253)$$

Подставляя (240) в (251), найдём:

$$\gamma = \frac{\vartheta_2 r_2}{\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' + \frac{r_2 - r_1}{2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)}. \quad (254)$$

Вводя обозначение

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = q, \quad (255)$$

сможем формуле (254) придать вид:

$$\gamma = \frac{2\vartheta_2 r_2 q + r_2 - r_1}{2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)}. \quad (256)$$

Подставляя (252) в (250) и пользуясь обозначением (256), будем иметь:

$$\int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} + \frac{x_1 r_1 + x_2 r_2}{(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)(1+x^2)} g(x) = -\frac{qx + \gamma \operatorname{arctg} x}{1+x^2}, \quad -a < x < a. \quad (257)$$

Полагая в (252) $x = \operatorname{tg} \varphi$, найдём:

$$p(\varphi) = \sec^2 \varphi g'(\operatorname{tg} \varphi). \quad (258)$$

Итак, отыскав из уравнения (257) функцию $g(x)$, мы по формуле (258) найдём искомое давление $p(\varphi)$. Уравнение (257) содержит две неизвестных постоянных q и $a = \operatorname{tg} \varphi_0$. Таким образом, и найденное по формуле (258) выражение для давления $p(\varphi)$ будет содержать неизвестные постоянные q и φ_0 . Обозначив через P равнодействующую внешних сжимающих сил, будем, как видно из рис. 28, иметь:

$$r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos \varphi' d\varphi' = P. \quad (259)$$

Подставив найденное для $p(\varphi)$ выражение в (256) и (259), получим два уравнения, из которых и найдём неизвестные постоянные q и φ_0 .

Таким образом, рассматриваемая в этом параграфе контактная задача сведена нами к решению уравнения (257). Вводя обозначения

$$\lambda(x) = \frac{x_1 r_1 + x_2 r_2}{\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2} \frac{1}{1+x^2}, \quad (260)$$

$$f(x) = -\frac{qx + \gamma \operatorname{arctg} x}{1+x^2}, \quad (261)$$

сможем написать уравнение (257) в виде:

$$\lambda(x) g(x) + \int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t-x} = f(x), \quad -a < x < a. \quad (262)$$

Уравнение (262) совпадает с уравнением (411) § 7 главы I. Как мы показали в главе I, заменив $\lambda(x)$ приближённым выражением вида:

$$\lambda(x) \approx \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (263)$$

мы получим уравнение, для которого можно указать точное решение:

$$\begin{aligned} g(x) = & -\frac{1}{\pi^2} \int_0^x [\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t)] \cos[\mu(x) - \mu(t)] dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[f(x) - \frac{g(a)}{a-t} - \frac{g(-a)}{a+t} \right] \sin[\mu(x) - \mu(t)] dt + \\ & + c_1 \cos \mu(x) + c_2 \sin \mu(x), \end{aligned} \quad (264)$$

где

$$F(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)}, \quad (265)$$

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}, \quad (266)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \lambda(t) dt. \quad (267)$$

Способ определения постоянных $c_1, c_2, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, входящих в указанное решение, также был указан в главе I.

Заметим, что в нашем случае

$$g(-a) = -g(a). \quad (268)$$

Действительно, в силу симметрии функция $p(\varphi)$ должна быть чётной, а следовательно, функция $g'(x)$ согласно (252) также должна быть чётной. Следовательно,

$$\int_{-a}^a \frac{g'(t) dt}{t} = 0. \quad (269)$$

Далее, как видно из (261),

$$f(0) = 0. \quad (270)$$

Полагая в (262) $x=0$ и принимая во внимание (269) и (270), найдём:

$$g(0) = 0. \quad (271)$$

Таким образом,

$$g(-a) = \int_0^{-a} g'(x) dx = - \int_0^a g'(x) dx = -g(a),$$

что и требовалось доказать.

Из соотношений (253), (255) и (268) следует:

$$g(a) = \frac{q}{2}, \quad g(-a) = -\frac{q}{2}. \quad (272)$$

Подставляя (272) в (264), найдем:

$$g(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^x [\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t)] \cos[\mu(x) - \mu(t)] dt + \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[f(t) - \frac{qt}{a^2 - t^2} \right] \sin[\mu(x) - \mu(t)] dt + c_1 \cos \mu(x) + c_2 \sin \mu(x). \quad (273)$$

Далее из формулы (267) следует:

$$\mu(0) = 0. \quad (274)$$

Полагая в (273) $x=0$ и принимая во внимание (271) и (274), найдём:

$$c_1 = 0. \quad (275)$$

Полагая в (273) $x=a$ и принимая во внимание (275) и (272), найдём:

$$c_2 \cos \mu(a) = \frac{q}{2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a [\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t)] \cos[\mu(a) - \mu(t)] dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a \left[f(t) - \frac{qt}{a^2 - t^2} \right] \sin[\mu(a) - \mu(t)] dt. \quad (276)$$

Подставляя (273) в уравнение (427) § 7 главы I и принимая во внимание (275), получим n уравнений:

$$\alpha_k = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \left\{ \int_0^x [\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t)] \cos[\mu(x) - \mu(t)] dt - \pi \int_0^x \left[f(t) - \frac{qt}{a^2 - t^2} \right] \sin[\mu(x) - \mu(t)] dt - \pi^2 c_2 \sin \mu(x) \right\} \times \\ \times \frac{P_k(x)}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (277)$$

где

$$P_k(x) = (b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k)(a_{k+1} + a_{k+2}x + \dots + a_nx^{n-k-1}) - \\ - (a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k)(b_{k+1} + b_{k+2}x + \dots + b_nx^{n-k-1}), \quad (278) \\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

согласно формулам (425) § 7 главы I.

Итак, мы получили систему из $n+1$ -го уравнения (276) и (277) для определения постоянных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, входящих в выражение (266) функции $R(x)$, и постоянной c_2 .

Дифференцируя (273) по x и принимая во внимание (267) и (275), найдём:

$$g'(x) = -F(x) - \frac{\lambda(x)}{\pi^2} R(x) + \frac{\lambda(x)}{\pi^2} \int_0^x [\pi^2 F(t) + \lambda(t) R(t)] \sin[\mu(x) - \\ - \mu(t)] dt + \frac{\lambda(x)}{\pi^2} \int_0^x \left[f(t) - \frac{qt}{a^2 - t^2} \right] \cos[\mu(x) - \mu(t)] dt + \\ + \frac{c_2}{\pi} \lambda(x) \cos \mu(x). \quad (279)$$

Вводя обозначение

$$\frac{1}{\pi} \frac{x_1 r_1 + x_2 r_2}{\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2} = k, \quad (280)$$

найдем согласно (260) и (267)

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{\pi k}{1+x^2}, \\ \mu(x) &= k \operatorname{arctg} x. \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

Подставляя (279) в (258) и принимая во внимание (281), получим следующее выражение для искомой функции $p(\varphi)$:

$$p(\varphi) = -\sec^2 \varphi F(\operatorname{tg} \varphi) - \frac{k}{\pi} R(\operatorname{tg} \varphi) + \\ + \frac{k}{\pi^2} \int_0^{\operatorname{tg} \varphi} \left[\pi^2 F(t) + \frac{\pi k R(t)}{1+t^2} \right] \sin k(\varphi - \operatorname{arctg} t) dt + \\ + \frac{k}{\pi} \int_0^{\operatorname{tg} \varphi} \left[f(t) - \frac{qt}{a^2 - t^2} \right] \cos k(\varphi - \operatorname{arctg} t) dt + c_2 k \cos k\varphi. \quad (282)$$

Подставляя (282) в (255) и (259), найдём постоянные q и $a = \operatorname{tg} \varphi_0$,

входящие в полученное для $p(\varphi)$ выражение, чем и завершим решение контактной задачи, рассматриваемой в этом параграфе.

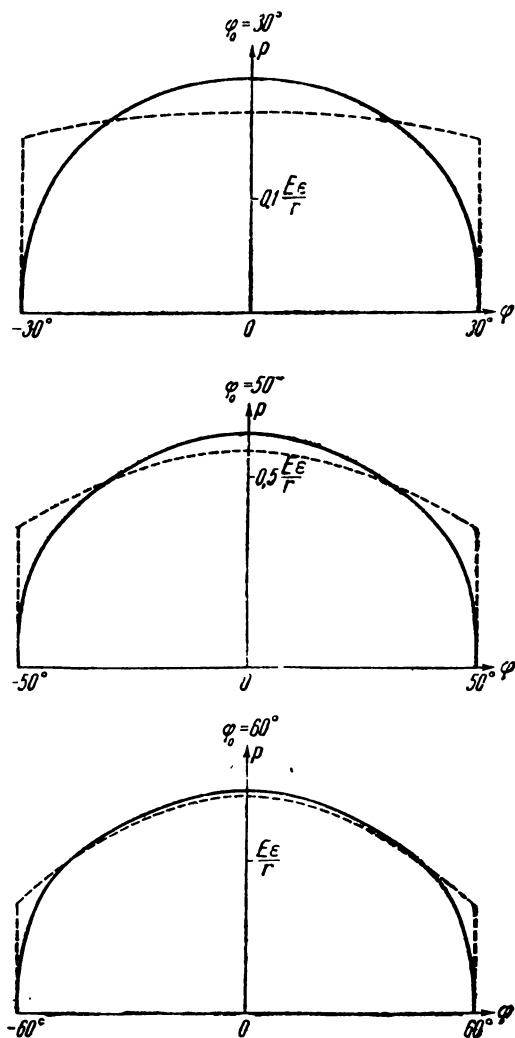


Рис. 33.

В заключение этого параграфа приведём графики давления¹⁾ $p(\varphi)$ для трёх значений угла φ_0 , а именно, для $\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 50^\circ$ и $\varphi_0 = 60^\circ$ (рис. 33), рассчитанные автором для того случая, когда

¹⁾ Вычисление их см. Приложение 2.

упругие постоянные обоих сжимаемых тел одинаковы и коэффициент Пуассона равен 0,3. Пунктиром на этих графиках показано распределение давления, найденное по известной приближённой формуле¹⁾

$$p(\varphi) = \frac{P}{r_1 (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0)} \cos \varphi,$$

предусматривающей контакт сжимаемых тел по цилиндрической поверхности радиуса r_1 в области значений угла φ :

$$-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0.$$

На рис. 34 показана зависимость между углом φ_0 и прило-

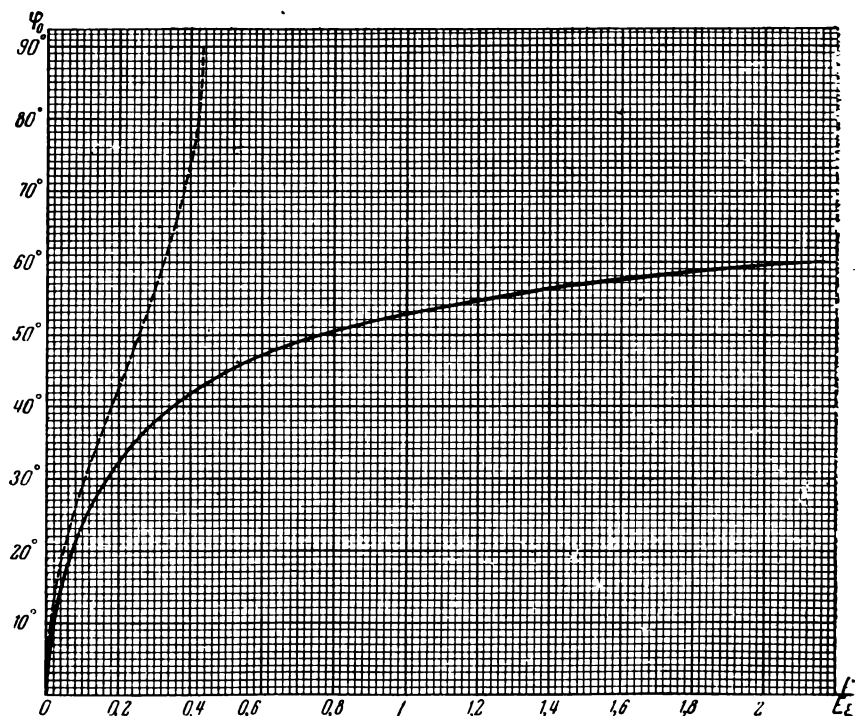


Рис. 34.

женной силой P (на рис. 33 и рис. 34 E — модуль упругости, $\epsilon = r_2 - r_1$). Пунктиром показана зависимость между этими величинами, рассчитанная в соответствии с теорией Герца,

¹⁾ Патон Е. О. и Горбунов Б. Н., Стальные мосты, т. II, изд. 3, Киев, 1931, стр. 23.

изложенной нами в § 1 этой главы. Это сопоставление наглядно демонстрирует неприемлемость теории Герца в контактной задаче, рассмотренной нами в этом параграфе.

§ 8. Решение задачи о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость на основе новой гипотезы

Задача о сжатии двух упругих тел была впервые решена в предположении, что оба тела имеют идеально гладкую поверхность. В ряде современных исследований рассмотрено сжатие упругих тел при наличии трения между ними. Правильнее было бы, между тем, при решении контактной задачи учитывать микроструктуру поверхности сжимаемых тел. Современная физика не даёт какой-либо законченной теории поверхностной структуры твёрдого тела. Ввиду этого в этом параграфе мы исходим при решении контактной задачи из следующих предположений. Если на поверхности упругого тела действует некоторое нормальное давление, то это давление вызывает в теле упругие перемещения, возникающие благодаря деформации всего упругого тела в целом и определяемые дифференциальными уравнениями теории упругости. Так, например, если на границу упругой полуплоскости действует нормальное давление $p(x)$ в области $-a < x < a$, то точка, лежащая на границе упругой полуплоскости и имеющая абсциссу x , совершает нормальное упругое перемещение, равное (см. формулу (7) главы II)

$$\vartheta \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.}, \quad \vartheta = \frac{2}{\pi E} (1 - \mu^2). \quad (283)$$

Однако, кроме указанных перемещений, нормальное давление, действующее в данной точке поверхности упругого тела, должно вызвать в этой точке ещё некоторое дополнительное нормальное перемещение, возникающее благодаря чисто местным деформациям поверхности, предопределяемым поверхностной структурой данного упругого тела. В этом параграфе мы будем предполагать, что это перемещение пропорционально нормальному давлению, действующему в данной точке поверхности упругого тела. Таким образом, если на границу упругой полуплоскости действует нормальное давление $p(x)$ в области $-a < x < a$, то это дополнительное перемещение будет равно нулю при $|x| > a$ и будет равно

$$kp(x) \quad (284)$$

при $|x| < a$, где k — некоторый коэффициент, зависящий от поверхностной структуры упругого тела. Полное нормальное

перемещение граничной точки упругого полупространства, вызываемое нормальным давлением $p(x)$, будет равно сумме перемещений, определяемых формулами (283) и (284), т. е. будет равно

$$kp(x) + \vartheta \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt + \text{const.}^1), \quad -a < x < a. \quad (285)$$

Вернёмся теперь к задаче о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость, рассмотренной нами в § 3 этой главы. Если штамп имеет плоское основание шириной $2a$, то при $-a < x < a$ нормальное перемещение граничных точек упругой полуплоскости должно оставаться постоянным. Таким образом, согласно выражению (285) для этого нормального перемещения мы для определения давления $p(x)$ под штампом будем иметь уравнение²⁾

$$kp(x) + \vartheta \int_{-a}^a p(t) \ln \frac{1}{|t-x|} dt = \text{const.}, \quad -a < x < a \quad (286)$$

вместо уравнения (115).

Дифференцируя по x обе части уравнения (286), получим уравнение

$$\lambda p'(x) + \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{t-x} = 0, \quad -a < x < a, \quad (287)$$

где $\lambda = \frac{k}{\vartheta}$.

Это уравнение для функции $p(x)$ совпадает с уравнением (450) § 7 главы I для функции $g(x)$ при

$$f(x) = 0, \quad \lambda(x) = \text{const.}$$

По формуле (467) § 7 главы I найдём в этом случае:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \left[S(t) + \frac{p(a)}{a-t} + \frac{p(-a)}{a+t} \right] \sin \frac{\pi}{\lambda} (x-t) dt + \\ + c_1 \cos \frac{\pi x}{\lambda} + c_2 \sin \frac{\pi x}{\lambda}, \quad (288)$$

¹⁾ Заметим, что гипотеза, выдвинутая нами в этом параграфе, представляет своеобразное сочетание теории Герца с гипотезой Винклера. При $k = 0$ мы приходим к теории Герца, при $\frac{k}{\vartheta} \rightarrow \infty$ мы приходим к теории Винклера.

²⁾ О численном решении уравнения (286) см. Приложение 2, п. 4.

где

$$S(x) = \frac{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}. \quad (289)$$

Построив для λ приближённое выражение вида:

$$\lambda \approx \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (290)$$

мы найдём постоянные $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, входящие в выражения для $S(x)$, из уравнений

$$\int_{-a}^a P(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{P_k(t)}{b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n} \right] dt = \frac{p(a) P_k(a)}{b_0 + b_1 a + \dots + b_n a^n} - \frac{p(-a) P_k(-a)}{b_0 - b_1 a + \dots + b_n (-a)^n} - \beta_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (291)$$

где

$$P_k(t) = (b_0 + b_1 t + \dots + b_k t^k) (a_{R+1} + a_{k+2} t + \dots + a_n t^{n-k-1}) - (a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k) (b_{k+1} + b_{k+2} t + \dots + b_n t^{n-k-1}), \quad (292)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1,$$

[см. формулы (469) и (425) § 7 главы I].

При надлежащем выборе коэффициентов k, k_1 и k_2 функция

$$\psi(x) = \frac{k}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a^2 + k_1 x^2}{a^2 + k_2 x^2} \quad (293)$$

в интервале $-a < x < a$ близка к единице. Так, например, если, следуя Н. И. Мусхелишвили¹⁾, положить

$$k = 1, \quad k_1 = 0,9, \quad k_2 = 0, \quad (294)$$

будем иметь следующие значения функции $\psi(x)$:

x	$0,1a$	$0,2a$	$0,3a$	$0,4a$	$0,5a$	$0,6a$	$0,7a$	$0,8a$	$0,9a$
$\psi(x)$	1,00	1,02	1,03	1,05	1,06	1,06	1,03	0,95	0,75

Таким образом, можно приближённо положить

$$\lambda \approx \lambda \psi(x) = \frac{\lambda k}{a} \frac{a^2 + k_1 x^2}{a^2 + k_2 x^2} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (295)$$

Сравнивая (295) с (290), найдём:

$$n = 2, \quad a_0 = \lambda k a^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \lambda k k_1, \quad b_0 = a^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = a k_2. \quad (296)$$

¹⁾ См. Н. И. Мусхелишвили, СINGУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, стр. 386.

Подставляя (296) в (292), получим:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= a^3 \lambda k k_1 t - \lambda k a^2 a k_2 t = \lambda k a^3 (k_1 - k_2) t, \\ P_1(t) &= a^3 \lambda k k_1 - \lambda k a^2 a k_2 = \lambda k a^3 (k_1 - k_2). \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

Подставляя (296) и (297) в (291), получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \int_{-a}^a p(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{a^2 + k_2 t^2} \right] dt &= \frac{p(a)}{a(1+k_2)} + \frac{p(-a)}{a(1+k_2)} - \frac{\beta_0}{\lambda k a^2 (k_1 - k_2)}, \\ \int_{-a}^a p(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a^2 + k_2 t^2} \right] dt &= \frac{p(a)}{a^2(1+k_2)} - \frac{p(-a)}{a^2(1+k_2)} - \frac{\beta_1}{\lambda k a^2 (k_1 - k_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (298)$$

Но так как в силу симметрии функция $p(x)$ должна быть чётной, то

$$\int_{-a}^a p(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a^2 + k_2 t^2} \right] dt = - \int_{-a}^a \frac{2k_2 t p(t)}{(a^2 + k_2 t^2)^2} dt = 0, \quad (299)$$

$$p(-a) = p(a). \quad (300)$$

Подставляя (299) и (300) во второе из уравнений (298), найдём:

$$\beta_1 = 0, \quad (301)$$

первое же из уравнений (298) можно представить в виде:

$$\int_{-a}^a p(t) \frac{a^2 - k_2 t^2}{(a^2 + k_2 t^2)^2} dt = \frac{2p(a)}{a(1+k_2)} - \frac{\beta_0}{\lambda k a^2 (k_1 - k_2)}. \quad (302)$$

Подставляя (296) и (301) в (289), найдём:

$$S(x) = \frac{\beta_0}{\lambda k (a^2 + k_1 x^2)}. \quad (303)$$

Подставляя (303) и (300) в (288), получим:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\beta_0}{\pi \lambda k} \int_0^x \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} (x-t)}{a^2 + k_1 t^2} dt + \frac{2ap(a)}{\pi} \int_0^x \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} (x-t)}{a^2 - t^2} dt + \\ &+ c_1 \cos \frac{\pi x}{\lambda} + c_2 \sin \frac{\pi x}{\lambda}. \end{aligned} \quad (304)$$

Полагая в (304)

$$x = a\xi, \quad t = a\tau, \quad (305)$$

найдем:

$$p(a\xi) = \frac{\beta_0}{\pi\lambda ka} \int_0^\xi \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} (\xi - \tau) d\tau}{1 + k_1 \tau^2} + \frac{2}{\pi} p(a) \int_0^\xi \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} (\xi - \tau) d\tau}{1 - \tau^2} + c_1 \cos \frac{\pi a \xi}{\lambda} + c_2 \sin \frac{\pi a \xi}{\lambda}. \quad (306)$$

Введём далее обозначения:

$$\frac{\beta_0}{2\lambda ka} = \beta, \quad \frac{\pi a}{\lambda} = c, \quad (307)$$

$$f_1(\xi, c) = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\sin c(\xi - \tau) d\tau}{1 + k_1 \tau^2}, \quad f_2(\xi, c) = \frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\sin c(\xi - \tau) d\tau}{1 - \tau^2}. \quad (308)$$

Тогда формуле (306) можно будет придать вид:

$$p(a\xi) = \beta f_1(\xi, c) + p(a) f_2(\xi, c) + c_1 \cos c\xi + c_2 \sin c\xi. \quad (309)$$

Так как функция $p(x)$ должна быть чётной, мы должны иметь:

$$c_2 = 0. \quad (310)$$

Полагая в (309) $\xi = 1$ и принимая во внимание (310), найдём:

$$p(a) = \beta f_1(1, c) + p(a) f_2(1, c) + c_1 \cos c. \quad (311)$$

Подставляя в (302) выражения для t и β_0 из (305) и (307), получим:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(a\tau) \frac{1 - k_2 \tau^2}{(1 + k_1 \tau^2)^2} d\tau = \frac{p(a)}{1 + k_1} - \frac{\beta}{k_1 - k_2}. \quad (312)$$

Если далее через P обозначить сжимающую силу, будем иметь:

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P,$$

или, если положить $t = a\tau$:

$$\int_{-1}^1 p(a\tau) d\tau = \frac{P}{a}. \quad (313)$$

Подставляя (310) в (309), найдём:

$$p(a\xi) = \beta f_1(\xi, c) + p(a) f_2(\xi, c) + c_1 \cos c\xi. \quad (314)$$

Подставляя (314) в (312) и (313) и присоединяя к полученным уравнениям соотношение (311), получим систему трёх линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \beta \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1(\tau, c) \frac{1 - k_2 \tau^2}{(1 + k_2 \tau^2)^2} d\tau + \frac{1}{k_1 - k_2} \right] + \\ & + p(a) \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2(\tau, c) \frac{1 - k_2 \tau^2}{(1 + k_2 \tau^2)^2} d\tau - \frac{1}{1 + k_2} \right] + \\ & + \frac{c_1}{2} \int_{-1}^1 \cos c\tau \frac{1 - k_2 \tau^2}{(1 + k_2 \tau^2)^2} d\tau = 0, \\ & \beta \int_{-1}^1 f_1(\tau, c) d\tau + p(a) \int_{-1}^1 f_2(\tau, c) d\tau + 2c_1 \frac{\sin c}{c} = \frac{P}{a}, \\ & \beta f_1(1, c) + p(a) [f_2(1, c) - 1] + c_1 \cos c = 0, \end{aligned} \right\} \quad (315)$$

для определения трёх неизвестных постоянных β , $p(a)$ и c_1 .

Отыскав β , $p(a)$ и c_1 из уравнений (315) и подставив их значения в (314), найдём искомое давление под штампом $p(x)$.

На рис. 35 показаны графики давления $p(x)$ под штампом для следующих значений параметра $c = \frac{\pi a \theta}{k}$:

$c = 0$, $c = 0,1$, $c = 1$,

$c = 10$ и $c = \infty$.

Случай $c = \infty$ соответствует общепринятой теории штампа, в соответствии с которой при $|x| = a$ давление $p(x)$ обращается в бесконечность.

При конечных значениях параметра c давление $p(x)$ остаётся ограниченным, и в предельном случае $c = 0$ мы получим равномерно распределённое давление под штампом.

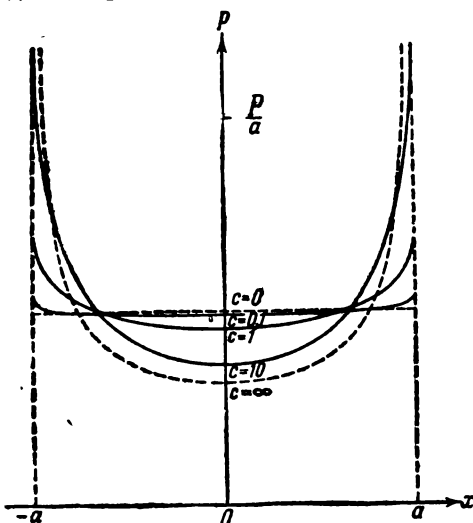


Рис. 35.

Г Л А В А III

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Математическое введение в осесимметричную контактную задачу теории упругости

В этом параграфе мы указываем общее решение основного уравнения осесимметричной контактной задачи теории упругости:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R} = f(r), \quad 0 < r < a, \quad (1)$$

где область интегрирования Σ — круг радиуса a (рис. 36), $d\sigma$ — элемент площади этого круга, R — расстояние между точкой A , остающейся неподвижной в процессе интегрирования, и точкой A' , заключённой внутри элемента $d\sigma$, $p(r')$ — неизвестная функция расстояния r' от точки A' до центра круга O , подлежащая определению из уравнения (1), и, наконец, $f(r)$ — заданная функция расстояния r от точки A до центра круга O . Относительно заданной функции $f(r)$ будем ниже предполагать, что она непрерывна вместе со своей первой производной при $0 < r < a$.

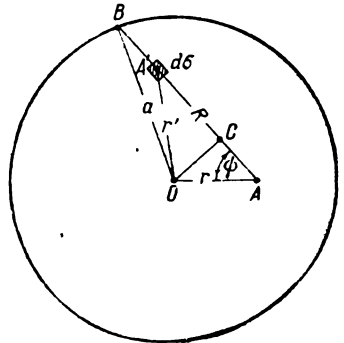


Рис. 36.

Представим распространённый на площадь круга Σ интеграл, стоящий в левой части уравнения (1), в виде кратного интеграла, выбрав в качестве переменных интегрирования полярные координаты R и ψ с центром в точке A . Интегрирование по переменной R мы должны производить в пределах от 0 до R_0 , где R_0 — расстояние между точками A и B на рис. 36, последующее интегрирование по ψ — в пределах от 0 до 2π . Площадь

элемента $d\sigma$ равна $R dR d\psi$ и, таким образом, уравнение (1) примет вид:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{R_0} p(r') dR = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (2)$$

Входящие в уравнение (2) расстояния r' и R_0 выражаются через переменные R и ψ соотношениями (см. рис. 36):

$$r' = \sqrt{R^2 - 2Rr \cos \psi + r^2}, \quad (3)$$

$$R_0 = r \cos \psi + \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}. \quad (4)$$

Введём в рассмотрение угол ϑ , определяемый соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{R - r \cos \psi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad (5)$$

(как видно из рис. 36, отношение, стоящее в правой части равенства (5), по абсолютному значению не превосходит единицы). Обозначим далее через $\theta(\psi)$ то значение, которое принимает угол ϑ при $R=0$:

$$\cos \theta(\psi) = -\frac{r \cos \psi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}}, \quad (6)$$

и перейдём в уравнении (2) от переменной интегрирования R к переменной ϑ . Из (5) найдём:

$$R = r \cos \psi + \cos \vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi},$$

$$dR = -\sin \vartheta \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} d\vartheta,$$

откуда

$$\int_0^{R_0} p(r') dR = \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (7)$$

так как согласно соотношениям (4), (5) и (6) угол ϑ изменяется от 0 до $\theta(\psi)$, когда R изменяется от R_0 до 0. Подставляя (7) в (2), получим уравнение

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (8)$$

Из соотношений (3) и (5) находим:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{(R - r \cos \psi)^2 + r^2 \sin^2 \psi} = \sqrt{\cos^2 \vartheta (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) + r^2 \sin^2 \psi} = \\ &= \sqrt{(a^2 - r^2 \sin^2 \psi) (1 - \sin^2 \vartheta) + r^2 \sin^2 \psi} = \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (8) можно представить в виде:

$$\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta + \\ + \int_{\pi}^{2\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (10)$$

Заменяя ϑ на $\pi - \vartheta$, найдём:

$$\int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sin \vartheta d\vartheta = \int_{\pi - \theta(\psi)}^{\pi} p(r') \sin \vartheta d\vartheta, \quad (11)$$

так как согласно (9) при этой замене r' сохраняет своё значение. Пользуясь соотношением (11) и заменяя ψ на $\pi + \psi$, получим:

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \int_{\pi}^{2\pi} d\psi \int_{\pi - \theta(\psi)}^{\pi} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\psi \int_{\pi - \theta(\pi + \psi)}^{\pi} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (12)$$

Но из соотношения (6) следует:

$$\cos \theta(\pi + \psi) = \frac{r \cos \psi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}} = -\cos \theta(\psi),$$

откуда

$$\theta(\pi + \psi) = \pi - \theta(\psi), \quad (13)$$

так как по условию $0 \leq \theta(\psi) \leq \pi$. Подставляя (13) в (12), найдём:

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\theta(\psi)} p(r') \sqrt{a^2 - r'^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10), получим уравнение

$$\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi} p(r') \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (15)$$

Подставляя (9) в (15), будем иметь:

$$\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi} p[\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) \sin^2 \vartheta}] \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta d\vartheta = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (16)$$

Введём далее обозначение

$$F(r) = 2 \int_0^{\pi} p[\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \vartheta}] \sqrt{a^2 - r^2} \sin \vartheta d\vartheta, \quad 0 < r < a. \quad (17)$$

Пользуясь этим обозначением, можем придать уравнению (16) вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} F(r \sin \psi) d\psi = f(r), \quad 0 < r < a. \quad (18)$$

Полагая в (17) $r = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, получим:

$$\int_0^{\pi} p(\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \vartheta}) \rho \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} F(\sqrt{a^2 - \rho^2}), \quad 0 < \rho < a. \quad (19)$$

Вводя обозначения

$$\rho p(\sqrt{a^2 - \rho^2}) = g(\rho), \quad (20)$$

$$F(\sqrt{a^2 - \rho^2}) = 4G(\rho), \quad (21)$$

сможем придать уравнению (19) вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} g(\rho \sin \vartheta) d\vartheta = G(\rho), \quad 0 < \rho < a. \quad (22)$$

Полагая в (20) $\rho = \sqrt{a^2 - r^2}$, найдём:

$$p(r) = \frac{g(\sqrt{a^2 - r^2})}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a. \quad (23)$$

Из (21) следует:

$$G(\rho) = \frac{1}{4} F(\sqrt{a^2 - \rho^2}), \quad 0 < \rho < a. \quad (24)$$

Итак, определив из уравнения (18) функцию $F(r)$, мы по формуле (24) найдём функцию $G(\rho)$. Определив далее из уравне-

ния (22) функцию $g(\rho)$, мы по формуле (23) найдём функцию $\rho(r)$, представляющую решение исходного уравнения (1). Таким образом, решение уравнения (1) мы свели к последовательному решению двух идентичных уравнений (18) и (22) для функций $F(r)$ и $g(\rho)$.

Заменяя ψ на $\pi - \psi$, найдём:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} F(r \sin \psi) d\psi = \int_0^{\pi/2} F(r \sin \psi) d\psi,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} F(r \sin \psi) d\psi &= \int_0^{\pi/2} F(r \sin \psi) d\psi + \\ &+ \int_{\pi/2}^{\pi} F(r \sin \psi) d\psi = 2 \int_0^{\pi/2} F(r \sin \psi) d\psi. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (18), придадим уравнению (18) вид:

$$\int_0^{\pi/2} F(r \sin \psi) d\psi = f(r), \quad 0 < r < a, \quad (26)$$

аналогично, уравнению (22) можно придать вид:

$$\int_0^{\pi/2} g(\rho \sin \vartheta) d\vartheta = G(\rho), \quad 0 < \rho < a. \quad (27)$$

Чтобы получить решение уравнений (26) и (27), докажем, что для всякой функции $f(r)$, непрерывной вместе со своей первой производной при $0 < r < a$, имеет место тождество

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \frac{\pi}{2} [f(r) - f(0)], \quad 0 < r < a. \quad (28)$$

Введём вместо переменной интегрирования ψ новую переменную ξ , полагая

$$\xi = r \sin \psi.$$

Найдём

$$d\xi = r \cos \psi d\psi, \quad d\psi = \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \psi}} = \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}},$$

$$\int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \int_0^r f'(\xi \sin \varphi) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}. \quad (29)$$

Пользуясь соотношением (29) и меняя порядок интегрирования, найдём:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \\ = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^r f'(\xi \sin \varphi) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} = \int_0^r d\xi \int_0^{\pi/2} \frac{\xi f'(\xi \sin \varphi)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\varphi. \quad (30)$$

Введём далее вместо переменной интегрирования φ новую переменную η , полагая $\eta = \xi \sin \varphi$.

Найдём:

$$d\eta = \xi \cos \varphi d\varphi, \quad d\varphi = \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \xi^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}, \\ \int_0^{\pi/2} f'(\xi \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\xi} f'(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30), найдём:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \int_0^r d\xi \int_0^{\xi} \frac{\xi f'(\eta)}{\sqrt{(r^2 - \xi^2)(\xi^2 - \eta^2)}} d\eta. \quad (32)$$

Если в кратном интеграле, стоящем в правой части соотношения (32), переменные ξ и η рассматривать как прямоугольные координаты, то область интегрирования будет служить треугольник, заштрихованный на рис. 37.

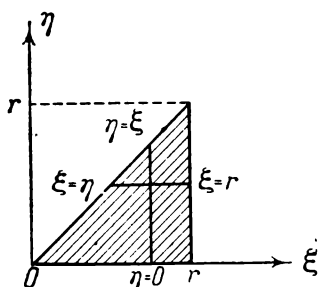


Рис. 37.

Действительно, сначала при фиксированном ξ ведётся интегрирование по η от $\eta = 0$ до $\eta = \xi$, потом производится интегрирование по ξ от 0 до r . Если в этом кратном интеграле изменить порядок интегрирования, то для того чтобы сохранилась область интегрирования, надо первоначально при фиксированном η вести интегрирование по ξ от $\xi = \eta$ до $\xi = r$, а затем

производить интегрирование по η от 0 до r (рис. 37). Итак, если изменить порядок интегрирования, соотношение (32) примет вид:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \int_0^r d\eta \int_{\eta}^r \frac{\xi f'(\eta)}{\sqrt{(r^2 - \xi^2)(\xi^2 - \eta^2)}} d\xi. \quad (33)$$

Заменим теперь переменную интегрирования ξ новой переменной t , положив

$$t = \frac{2\xi^2 - \eta^2 - r^2}{r^2 - \eta^2}.$$

Находим:

$$\left. \begin{aligned} dt &= \frac{4\xi d\xi}{r^2 - \eta^2}, & 1+t &= \frac{2(\xi^2 - \eta^2)}{r^2 - \eta^2}, & 1-t &= \frac{2(r^2 - \xi^2)}{r^2 - \eta^2}, \\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{2\xi d\xi}{\sqrt{(r^2 - \xi^2)(\xi^2 - \eta^2)}}, \\ \int_0^r \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(r^2 - \xi^2)(\xi^2 - \eta^2)}} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\psi = \frac{\pi}{2} \int_0^r f'(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} [f(r) - f(0)],$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь тождеством (28), легко получить решение уравнения (26). Предположим сначала, что существует функция $F(r)$, непрерывная вместе со своей первой производной при $0 < r < a$ и удовлетворяющая уравнению (26). Дифференцируя обе части уравнения (26) по r , получим:

$$\int_0^{\pi/2} F'(r \sin \psi) \sin \psi d\psi = f'(r), \quad 0 < r < a. \quad (35)$$

Заменяя в (35) r на $r \sin \varphi$ и интегрируя обе части полученного соотношения по φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, найдём:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} F'(r \sin \varphi \sin \psi) \sin \psi d\psi = \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi) d\varphi, \quad 0 < r < a. \quad (36)$$

Умножая обе части соотношения (36) на r и принимая во внимание тождество (28), получим:

$$\frac{\pi}{2} [F(r) - F(0)] = r \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi) d\varphi, \quad 0 < r < a. \quad (37)$$

Полагая в (26) $r=0$, найдём:

$$\frac{\pi}{2} F(0) = f(0). \quad (38)$$

Подставляя (18) в (37), придём к тому выводу, что если уравнение (26) имеет решение, непрерывное вместе с его первой производной при $0 < r < a$, то это решение должно иметь вид:

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + r \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi) d\varphi \right], \quad 0 < r < a. \quad (39)$$

Докажем теперь, что функция $F(r)$, определяемая формулой (9), действительно удовлетворяет уравнению (26). Пользуясь тождеством (28), найдём из (9):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} F(r \sin \psi) d\psi &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left[f(0) \int_0^{\pi/2} d\psi + \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi \sin \psi) r \sin \psi d\varphi \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} f(0) + \frac{\pi}{2} [f(r) - f(0)] \right\} = f(r), \quad 0 < r < a, \end{aligned}$$

т. е. функция $F(r)$, определяемая формулой (39), действительно удовлетворяет уравнению (26).

Аналогично, уравнение (27) будет иметь решение:

$$g(\rho) = \frac{2}{\pi} \left[G(0) + \rho \int_0^{\pi/2} G'(\rho \sin \varphi) d\varphi \right], \quad 0 < \rho < a. \quad (40)$$

Подставляя (39) и (40) в (24) и (23), найдём:

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi} \left[f(0) + \sqrt{a^2 - \rho^2} \int_0^{\pi/2} f'(\sqrt{a^2 - \rho^2} \sin \varphi) d\varphi \right], \quad (41)$$

$$0 < \rho < a,$$

$$p(r) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{G(0)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_0^{\pi/2} G'(\sqrt{a^2 - r^2} \sin \varphi) d\varphi \right], \quad (42)$$

$$0 < r < a.$$

Формулы (41) и (42) определяют решение исходного уравнения (1). Можно, однако, представить решение в более удобной для вычислений форме. Из (24) находим:

$$G(0) = \frac{1}{4} F(a), \quad G'(\rho) = -\frac{1}{4} F'(\sqrt{a^2 - \rho^2}) \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}. \quad (43)$$

Подставляя (43) в (42), получим:

$$p(r) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{F(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_0^{\pi/2} F' \left[\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi} \right] \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi}} \right\}. \quad (44)$$

Произведём теперь в (44) замену переменной интегрирования φ , положив

$$a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi = s^2.$$

Находим:

$$(a^2 - r^2) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -s ds,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - r^2} \sin \varphi d\varphi &= -\frac{s ds}{\sqrt{a^2 - r^2} \cos \varphi} = \\ &= -\frac{s ds}{\sqrt{a^2 - r^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi}} = -\frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} F' \left[\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi} \right] \frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - r^2) \sin^2 \varphi}} = \int_r^a \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), найдём:

$$p(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{F(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right], \quad 0 < r < a. \quad (46)$$

Формула (46) совместно с формулой (39) для функции $F(r)$ даёт решение исходного уравнения (1). Формуле (39) можно придать вид, сходный с видом формулы (46), если заменить переменную интегрирования φ новой переменной σ , положив

$$r \sin \varphi = \sigma.$$

Найдём:

$$d\varphi = \frac{d\sigma}{r \cos \varphi} = \frac{d\sigma}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}}, \quad \int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi) d\varphi = \int_0^r \frac{f'(\sigma) d\sigma}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (39), найдём

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + r \int_0^r \frac{f'(\sigma) d\sigma}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} \right], \quad 0 < r < a. \quad (48)$$

В заключение этого параграфа укажем ещё одну простую формулу для решения исходного уравнения (1).

Будем ниже предполагать, что функция $f(r)$ имеет непрерывную вторую производную. Дифференцируя обе части соотношения (39) по r , найдём:

$$F'(r) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} f'(r \sin \varphi) d\varphi + \int_0^{\pi/2} f''(r \sin \varphi) r \sin \varphi d\varphi \right], \quad (49)$$

$$0 < r < a.$$

Полагая в (49) $r \sin \varphi = \sigma$, будем иметь (см. (47)):

$$F'(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma, \quad 0 < r < a. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (46), найдём:

$$p(r) = -\frac{1}{\pi^2} \int_r^a ds \int_0^s \frac{f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma)}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} d\sigma + \frac{c}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a, \quad (51)$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} F(a). \quad (52)$$

Подставляя (48) в (52), получим:

$$c = \frac{1}{\pi^2} \left[f(0) + a \int_0^a \frac{f'(\sigma) d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} \right]. \quad (53)$$

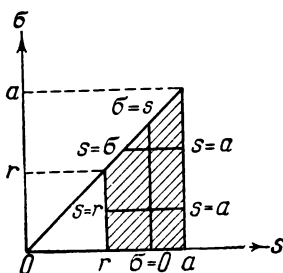


Рис. 38.

Если в кратном интеграле, входящем в формулу (51), переменные интегрирования s и σ рассматривать как прямоугольные координаты, то область интегрирования будет служить трапеция, заштрихованная на рис. 38. Действительно, сперва при фиксированном s производится интегрирование по σ в пределах от $\sigma=0$ до $\sigma=s$, затем производится интегрирование по s в пределах от r до a . Если изменить порядок интегрирования, то первоначальное интегрирование по s надо будет вести в пределах от $s=r$ до $s=a$, если $\sigma < r$, и в пределах от $s=\sigma$ до $s=a$, если $\sigma > r$, т. е. в пределах от s_0 до a , где

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= r && \text{при } \sigma < r, \\ s_0 &= \sigma && \text{при } \sigma > r. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Последующее интегрирование по σ следует производить в пределах от 0 до a . Таким образом, после перемены порядка интегрирования формула (51) примет вид:

$$p(r) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^a d\sigma \int_{s_0}^a \frac{f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma)}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} ds + \frac{c}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a. \quad (55)$$

При $\sigma < r$, полагая

$$s = \frac{r}{t}, \quad \sigma = kr, \quad (56)$$

найдем согласно (54):

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} &= - \int_1^{r/a} \frac{r dt}{t^2 r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) \left(\frac{1}{t^2} - k^2\right)}} = \\ &= \frac{1}{r} \int_{r/a}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Определённый интеграл

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad (58)$$

носит название эллиптического интеграла первого рода, существуют подробные таблицы, дающие его значение в зависимости от верхнего предела x и параметра k , называемого модулем эллиптического интеграла. Таким образом, формуле (57) можно придать вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \sigma < r \quad \int_{s_0}^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} &= \frac{1}{r} [F(1, k) - F(x, k)], \\ x = \frac{r}{a}, \quad k = \frac{\sigma}{r} \end{aligned} \quad (59)$$

согласно (56).

При $\sigma > r$, полагая

$$s = \frac{\sigma}{t}, \quad r = \sigma k, \quad (60)$$

найдем согласно (54):

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} &= - \int_1^{\frac{\sigma}{a}} \frac{\sigma dt}{t^2 \sigma^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} - k^2\right) \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_{\frac{\sigma}{a}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Пользуясь обозначением (58), сможем придать формуле (61) вид:

$$\text{при } \sigma > r \quad \int_{s_0}^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} = \frac{1}{\sigma} [F(1, k) - F(x, k)], \quad (62)$$

$$x = \frac{\sigma}{a}, \quad k = \frac{r}{\sigma}$$

согласно (60).

Формулы (59) и (62) можно объединить в одну:

$$\int_{s_0}^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - \sigma^2)}} = \frac{1}{ax} [F(1, k) - F(x, k)], \quad (63)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{r}{a}, \quad k = \frac{\sigma}{r} \quad \text{при } \sigma < r, \\ x = \frac{\sigma}{a}, \quad k = \frac{r}{\sigma} \quad \text{при } \sigma > r. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Подставляя (63) в (55), найдём:

$$p(r) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^a \frac{f'(\sigma) + \sigma f''(\sigma)}{ax} [F(1, k) - F(x, k)] d\sigma + \frac{c}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (65)$$

$$0 < r < a.$$

В формуле (65) x и k являются функциями переменной интегрирования σ , определяемыми формулой (64), постоянная c определяется формулой (53).

Итак, для решения уравнения (1) мы получили две формулы: формулу (46), где функция $F(r)$ определяется соотношением (48), либо соотношением (39), и формулу (65). В тех случаях, когда функция $F(r)$, фигурирующая в формуле (46), определяется в элементарных функциях, выгодно пользоваться формулой (46) как более простой. Если же определённый интеграл, входящий в формулу (48) для функции $F(r)$, не выражается в элементарных функциях и требует приближённых методов вычисления, выгоднее пользоваться формулой (65). Вычисление подинтегральной функции в формуле (65) легко осуществляется с помощью таблиц для эллиптических интегралов; после того как для ряда значений σ , заключённых в интервале интегрирования $(0, a)$, подсчитаны её числовые значения, можно вычислить значение определённого интеграла, входящего в формулу (65), по какому-либо приближённому методу из теории механических квадратур (по формуле трапеций, по формуле Симпсона и т. д.).

§ 2. Сжатие упругих тел, ограниченных поверхностями вращения

В этом параграфе мы рассматриваем осесимметричную контактную задачу теории упругости, т. е. задачу о сжатии двух упругих тел, ограниченных поверхностями вращения, причём предполагается, что оси симметрии сжимаемых тел совпадают и равнодействующие сжимающих сил лежат на этой общей оси симметрии. Построим систему цилиндрических координат r, φ, z , направив ось z по общей оси симметрии сжимаемых тел и расположив начало координат в точке контакта упругих тел (рис. 39). Пусть

$$z = z_1(r) \text{ и } z = -z_2(r) \quad (66)$$

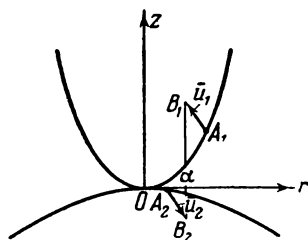


Рис. 39.

уравнения поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела (будем считать первым то тело, внутри которого проходит положительная полуось z). Пусть далее A_1 и A_2 — две точки поверхностей сжимаемых тел, приходящие в соприкосновение при сжатии, u_1 и u_2 — их упругие перемещения. Расстояние α между точками B_1 и B_2 на рис. 39 представляет собой сближение упругих тел при сжатии и будет неизменным, для какой бы пары точек, приходящих в соприкосновение при сжатии, мы ни выполнили построение, изображённое на рис. 39. Если r — то расстояние от оси симметрии, на котором оказываются точки A_1 и A_2 после сжатия, то, пренебрегая малыми высшего порядка, можно считать, что до сжатия точки A_1 и A_2 имели координаты z , равные согласно (66) $z_1(r)$ и $-z_2(r)$. Тогда из рис. 39 следует:

$$\alpha = u_{1z} + z_1(r) + z_2(r) - u_{2z}, \quad (67)$$

где u_{1z} и u_{2z} проекции упругих перемещений u_1 и u_2 на ось z . Перейдём теперь к вычислению этих упругих перемещений.

Будем считать поверхности сжимаемых тел абсолютно гладкими и обозначим через $p(r)$ нормальное давление, возникающее в области контакта на расстоянии r от оси симметрии. Будем далее приближённо считать, что искомые перемещения u_{1z} и u_{2z} будут такими же, как если бы давление, возникающее в области контакта, действовало на верхнее и нижнее упругие полупространства с теми же упругими постоянными, что и у сжимаемых тел. В силу осевой симметрии область контакта будет кругом некоторого неизвестного пока радиуса a (рис. 40). Пусть $d\sigma$ — элемент площади этого круга, охватывающий точ-

ку A' , находящуюся на расстоянии r' от оси симметрии. На этот элемент площади будет действовать нормальная сила $p(r') d\sigma$. Как известно, нормальная сила P , действующая на упругое полупространство, вызывает на расстоянии R от точки её приложения нормальное перемещение на поверхности упругой среды, равное¹⁾ $P \frac{\vartheta}{R}$, где $\vartheta = \frac{1-\mu^2}{\pi E}$, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

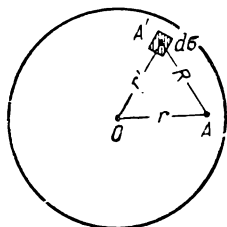


Рис. 40.

Таким образом, давление, действующее на элемент площади $d\sigma$, вызывает в точке A , показанной на рис. 40, нормальное упругое перемещение du_z , равное

$$du_z = \vartheta \frac{p(r') d\sigma}{R},$$

где R — расстояние между точками A и A' . Чтобы получить полное нормальное перемещение u_z в точке A , находящейся на расстоянии r от оси симметрии, необходимо проинтегрировать элементарное перемещение du_z по всей площади контакта. Найдём:

$$u_z = \vartheta \iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R}, \quad (68)$$

если через Σ обозначить круг радиуса a , представляющий область контакта. Таким образом, искомые перемещения u_{1z} и u_{2z} будут равны:

$$u_{1z} = \vartheta_1 \iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R}, \quad u_{2z} = -\vartheta_2 \iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R}, \quad (69)$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2}, \quad (70)$$

E_1 и E_2 — модули упругости, μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона сжимаемых тел.

Подставляя (69) в (67), получим уравнение

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R} = a - z_1(r) - z_2(r), \quad 0 < r < a, \quad (71)$$

или

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(r') d\sigma}{R} = f(r), \quad 0 < r < a, \quad (72)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, 1937, стр. 364.

где

$$f(r) = \frac{\alpha - z_1(r) - z_2(r)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (73)$$

Уравнение (72), полученное нами для определения давления $p(r)$ в области контакта, совпадает с уравнением (1) этой главы, изученным нами в § 1. Как мы показали в § 1, решение этого уравнения определяется формулой (46):

$$p(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{F(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right], \quad 0 < r < a, \quad (74)$$

где $F(r)$ — функция, определяемая формулой (48) либо формулой (39). Подставляя (73) в (48) и (39), найдём:

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[\alpha - r \int_0^r \frac{z_1'(\sigma) + z_2'(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma \right], \quad 0 < r < a, \quad (75)$$

ИЛИ

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ \alpha - r \int_0^{\pi/2} [z_1'(r \sin \varphi) + z_2'(r \sin \varphi)] d\varphi \right\}, \quad (76)$$

$$0 < r < a,$$

так как $z_1(0) = z_2(0) = 0$ (см. рис. 39). Можно также воспользоваться и формулой (65) для искомого давления $p(r)$ в области контакта.

Полученное нами решение содержит две неизвестные постоянные: радиус области контакта a и сближение тел при сжатии α . Перейдём к их определению.

Как видно из формулы (74), если $F(a) \neq 0$, то давление $p(r) \rightarrow \infty$, когда $r \rightarrow a$. Таким образом, для того чтобы найденное нами для давления $p(r)$ выражение оставалось ограниченным во всей области контакта, необходимо, чтобы имело место равенство

$$F(a) = 0. \quad (77)$$

Если условие (77) выполняется, формула (74) принимает вид:

$$p(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_r^a \frac{F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a. \quad (78)$$

Давление $p(r)$, определяемое формулой (78), на границе области контакта, т. е. при $r = a$, обращается в нуль.

Подставляя (75) и (76) в (77), получим для сближения тел при сжатии α формулы:

$$\alpha = a \int_0^a \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} d\sigma, \quad (79)$$

или

$$\alpha = a \int_0^{\pi/2} [z'_1(a \sin \varphi) + z'_2(a \sin \varphi)] d\varphi. \quad (80)$$

Обозначим далее через P величину равнодействующей сжимающих сил. Давление $p(r)$, возникающее в области контакта, должно уравновешивать силу P , следовательно, проинтегрировав давление $p(r)$ по всей области контакта, мы должны получить силу P . При принятых нами обозначениях получим условие

$$\iint_{\Sigma} p(r') d\sigma = P, \quad (81)$$

или, так как элемент площади $d\sigma$ в полярных координатах r' , φ' равен $r' dr' d\varphi'$, будем иметь:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a p(r') r' dr' = P,$$

т. е.

$$2\pi \int_0^a p(r') r' dr' = P. \quad (82)$$

Подставляя (78) в (82), найдём:

$$- \int_0^a dr' \int_{r'}^a \frac{r' F'(s) ds}{\sqrt{s^2 - r'^2}} = P. \quad (83)$$

Если в полученном кратном интеграле переменные интегрирования r' и s рассматривать как прямоугольные координаты, областью интегрирования будет служить треугольник, заштрихованный на рис. 41. Как видно из того же рисунка, если изменить порядок интегрирования, соотношение (83) примет вид:

$$- \int_0^a ds \int_0^s \frac{r' F'(s) dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} = P, \quad (84)$$

или, так как

$$\int_0^s \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} = -\sqrt{s^2 - r'^2} \Big|_{r'=0}^{r'=s} = s,$$

будем иметь:

$$-\int_0^a F'(s) s ds = P. \tag{85}$$

Выполняя в (85) интегрирование по частям, получим:

$$\int_0^a F(s) ds - sF(s) \Big|_{s=0}^{s=a} = P,$$

или

$$\int_0^a F(s) ds = P \tag{86}$$

в силу условия (77).

Подставляя (75) в (86), найдём:

$$\alpha a - \int_0^a ds \int_0^s s \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \tag{87}$$

Подставляя (79) в (87), получим:

$$a^2 \int_0^a \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} d\sigma - \int_0^a ds \int_0^s s \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \tag{88}$$

Если в кратном интеграле, входящем в формулу (88), переменные интегрирования s и σ рассматривать как прямоугольные координаты, то областью интегрирования будет служить

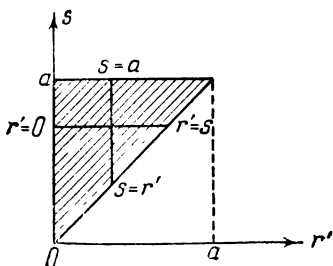


Рис. 41.

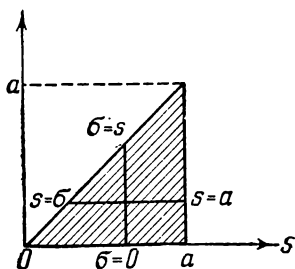


Рис. 42.

треугольник, заштрихованный на рис. 42. Если изменить порядок интегрирования, то, как видно из рис. 42, будем иметь:

$$\int_0^a ds \int_0^s s \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} d\sigma = \int_0^a d\sigma \int_\sigma^a s \frac{z'_1(\sigma) + z'_2(\sigma)}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} ds, \tag{89}$$

или, так как

$$\int_{\sigma}^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} = \sqrt{s^2 - \sigma^2} \Big|_{s=\sigma}^{s=a} = \sqrt{a^2 - \sigma^2},$$

получим:

$$\int_0^a ds \int_0^s s \frac{z_1'(\sigma) + z_2'(\sigma)}{\sqrt{s^2 - \sigma^2}} d\sigma = \int_0^a [z_1'(\sigma) + z_2'(\sigma)] \sqrt{a^2 - \sigma^2} d\sigma. \quad (90)$$

Подставляя (90) в (88), найдём:

$$\int_0^a [z_1'(\sigma) + z_2'(\sigma)] \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} - \sqrt{a^2 - \sigma^2} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

или окончательно

$$\int_0^a \frac{z_1'(\sigma) + z_2'(\sigma)}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} \sigma^2 d\sigma = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (91)$$

Полагая в (91) $\sigma = a \sin \varphi$, можно придать соотношению (91) вид:

$$a^2 \int_0^{\pi/2} [z_1'(a \sin \varphi) + z_2'(a \sin \varphi)] \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (92)$$

Итак, радиус области контакта a определяется уравнением (91) или эквивалентным ему уравнением (92). После того как найдена постоянная a , сближение тел при сжатии α может быть вычислено по формуле (79) либо по формуле (80). Распределение давления p в области контакта определится формулой (78), где $F(r)$ — функция, определяемая формулой (75) или эквивалентной ей формулой (76).

Перечисленные нами формулы дают общее решение задачи о сжатии двух упругих тел, ограниченных поверхностями вращения. Перейдём теперь к анализу различных частных случаев осесимметричной контактной задачи теории упругости.

Будем сначала предполагать, что первоначальный контакт сжимаемых упругих тел осуществляется в одной точке, причём для поверхностей обоих тел эта точка является регулярной. В этом случае функции $z_1(r)$ и $z_2(r)$, определяющие конфигурацию сжимаемых тел, могут быть разложены в ряды Тэйлора в окрестности точки $r=0$:

$$\left. \begin{aligned} z_1(r) &= z_1(0) + z_1'(0)r + \frac{1}{2!} z_1''(0)r^2 + \frac{1}{3!} z_1'''(0)r^3 + \dots, \\ z_2(r) &= z_2(0) + z_2'(0)r + \frac{1}{2!} z_2''(0)r^2 + \frac{1}{3!} z_2'''(0)r^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Так как начало цилиндрических координат r , φ , z мы расположили в точке касания сжимаемых тел и ось z перпендикулярна к плоскости, касательной к обоим поверхностям сжимаемых тел в точке их контакта, будем иметь:

$$z_1(0) = z_2(0) = 0, \quad z'_1(0) = z'_2(0) = 0. \quad (94)$$

Таким образом, согласно (93) и (94) для суммы функций $z_1(r) + z_2(r)$ будем иметь разложение

$$z_1(r) + z_2(r) = \frac{z''_1(0) + z''_2(0)}{2!} r^2 + \frac{z'''_1(0) + z'''_2(0)}{3!} r^3 + \dots \quad (95)$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда сумма вторых производных

$$z''_1(0) + z''_2(0) \neq 0. \quad (96)$$

Ввиду малости упругих перемещений и вытекающей отсюда малости области контакта можно для суммы функций $z_1(r) + z_2(r)$ принять в области контакта приближённое выражение

$$z_1(r) + z_2(r) = \frac{1}{2} [z''_1(0) + z''_2(0)] r^2, \quad 0 < r < a, \quad (97)$$

отбросив в разложении (95) члены высших порядков малости. Вводя обозначение

$$A = \frac{1}{2} [z''_1(0) + z''_2(0)], \quad (98)$$

будем в рассматриваемом случае иметь:

$$z_1(r) + z_2(r) = Ar^2, \quad 0 < r < a. \quad (99)$$

Подставляя (99) в (92), получим для определения радиуса области контакта a соотношение:

$$2Aa^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (100)$$

Так как

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \, d\varphi = - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{2}{3},$$

из (100) найдём:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}}. \quad (101)$$

Подставляя (99) в (80), получим:

$$\alpha = 2Aa^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = 2Aa^2. \quad (102)$$

Подставляя (101) в (102), найдём:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9\pi^2 AP^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}. \quad (103)$$

Подставляя (99) в (76), получим:

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - 2Ar^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi \right) = \frac{2(a - 2Ar^2)}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (104)$$

Подставляя (104) в (78), найдём:

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{4A}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_r^a \frac{s \, ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{4A}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \sqrt{s^2 - r^2} \Big|_{s=r}^{s=a} = \\ &= \frac{4A\sqrt{a^2 - r^2}}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad 0 < r < a. \end{aligned} \quad (105)$$

Но согласно (101)

$$\frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \frac{3\pi P}{8a^3}. \quad (106)$$

Подставляя (106) в (105), найдём:

$$p(r) = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \frac{P}{\pi a^2}, \quad \pi^2 \quad 0 < r < a. \quad (107)$$

Как видим, давление p в области контакта меняется в осесимметричной контактной задаче в зависимости от расстояния до первоначальной точки касания по тому же закону, что и в плоской контактной задаче теории упругости.

Рассмотрим теперь тот особый случай контактной задачи, когда сумма вторых производных $z_1''(r) + z_2''(r)$ обращается в нуль при $r=0$:

$$z_1''(0) + z_2''(0) = 0. \quad (108)$$

Будем для общности предполагать, что первый не обращающийся в нуль член разложения (95) содержит множитель r в степени $2n$ (коэффициенты при всех нечётных степенях r в этом разложении должны быть равны нулю благодаря тому, что функции $z_1(r)$ и $z_2(r)$ чётные, если рассматривать их не только для положительных, но и для отрицательных значений аргумента r). Тогда, пренебрегая в разложении (95) членами высшего порядка малости, будем в области контакта иметь:

$$z_1(r) + z_2(r) = \frac{z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)}{(2n)!} r^{2n},$$

или

$$z_1(r) + z_2(r) = Ar^{2n}, \quad (109)$$

если ввести обозначение

$$A = \frac{1}{(2n)!} [z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)]. \quad (110)$$

Подставляя (109) в (92), найдём:

$$2nAa^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (111)$$

Введём обозначение

$$c_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi d\varphi. \quad (112)$$

Путём интегрирования по частям найдём:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi d(\cos\varphi) = \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\varphi \cos^2\varphi d\varphi - \sin^{2n}\varphi \cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\varphi (1 - \sin^2\varphi) d\varphi = \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\varphi d\varphi - 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\varphi d\varphi = 2nc_{n-1} - 2nc_n, \end{aligned}$$

откуда

$$c_n = \frac{2n}{2n+1} c_{n-1}. \quad (113)$$

Полагая в (113) $n-1$ вместо n , получим:

$$c_{n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} c_{n-2}. \quad (114)$$

Подставляя (114) в (113), найдём:

$$c_n = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} c_{n-2}. \quad (115)$$

Выражая в (115) c_{n-2} через c_{n-3} на основании общего соотношения (113), получим:

$$c_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)} c_{n-3}.$$

Продолжая указанный процесс, придём к формуле:

$$c_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3} c_0. \quad (116)$$

Полагая в (112) $n=0$, найдём:

$$c_0 = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = 1. \quad (117)$$

Подставляя (117) в (116), получим:

$$c_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) (2n+1)}. \quad (118)$$

Подставляя (118) в (111), найдём:

$$2nAa^{2n+1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) (2n+1)} = \frac{1}{2} \pi P(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

откуда

$$a = \sqrt[2n+1]{\frac{\pi}{4n} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) (2n+1) P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n} \frac{P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}}. \quad (119)$$

Подставляя (109) в (80), найдём:

$$\alpha = 2nAa^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} \varphi \, d\varphi = 2nAa^{2n} c_{n-1}, \quad (120)$$

в соответствии с обозначением (112). Подставляя (118) в (120), получим:

$$\alpha = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4) (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) (2n-1)} Aa^{2n}. \quad (121)$$

Подставляя (109) в (76), найдём:

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - 2nAr^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} \varphi \, d\varphi \right) = \frac{2(\alpha - 2nAr^{2n}c_{n-1})}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (122)$$

Подставляя (118) в (122), получим:

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[\alpha - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4) (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) (2n-1)} Ar^{2n} \right]. \quad (123)$$

Подставляя (123) в (78), найдём:

$$P(r) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4) (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) (2n-1)} \frac{2nA}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_r^a \frac{s^{2n-1} ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}. \quad (124)$$

Полагая в (124) $s = a\sigma$, получим:

$$p(r) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2) 2n 2n A a^{2n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1) \pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_{r/a}^1 \frac{\sigma^{2n-1} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}. \quad (125)$$

Вводя обозначение

$$p_n(\rho) = \int_{\rho}^1 \frac{\sigma^{2n-1} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}, \quad (126)$$

сможем придать формуле (125) вид:

$$p(r) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2) 2n 2n A a^{2n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1) \pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} p_n\left(\frac{r}{a}\right). \quad (127)$$

Путём интегрирования по частям найдём:

$$\begin{aligned} p_n(\rho) &= \int_{\rho}^1 \frac{\sigma^{2n-1} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} = \int_{\rho}^1 \sigma^{2n-2} d(\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}) = \\ &= -(2n-2) \int_{\rho}^1 \sigma^{2n-3} \sqrt{\sigma^2 - \rho^2} d\sigma + \sigma^{2n-2} \sqrt{\sigma^2 - \rho^2} \Big|_{\sigma=\rho}^{\sigma=1} = \\ &= -(2n-2) \int_{\rho}^1 \frac{\sigma^{2n-1} - \rho^2 \sigma^{2n-3}}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} d\sigma + \sqrt{1 - \rho^2} = \\ &= -(2n-2) \int_{\rho}^1 \frac{\sigma^{2n-1} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} + (2n-2) \rho^2 \int_{\rho}^1 \frac{\sigma^{2n-3} d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} + \sqrt{1 - \rho^2} = \\ &= -(2n-2) p_n(\rho) + (2n-2) \rho^2 p_{n-1}(\rho) + \sqrt{1 - \rho^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$p_n(\rho) = \frac{2n-2}{2n-1} \rho^2 p_{n-1}(\rho) + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2n-1}. \quad (128)$$

Полагая в (128) $n-1$ вместо n , найдём:

$$p_{n-1}(\rho) = \frac{2n-4}{2n-3} \rho^2 p_{n-2}(\rho) + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2n-3}. \quad (129)$$

Подставляя (129) в (128), будем иметь:

$$\begin{aligned} p_n(\rho) &= \sqrt{1-\rho^2} \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)(2n-3)} \rho^2 \right] + \\ &+ \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)} \rho^4 p_{n-2}(\rho). \quad (130) \end{aligned}$$

Полагая в (128) $n-2$ вместо n , получим:

$$P_{n-2}(\rho) = \frac{2n-6}{2n-5} \rho^2 P_{n-3}(\rho) + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2n-5}. \quad (131)$$

Подставляя (131) в (130), найдём:

$$P_n(\rho) = \sqrt{1-\rho^2} \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)(2n-3)} \rho^2 + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \rho^4 \right] + \frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \rho^6 P_{n-3}(\rho). \quad (132)$$

Продолжая указанный процесс, придём к формуле

$$P_n(\rho) = \sqrt{1-\rho^2} \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)(2n-3)} \rho^2 + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \rho^4 + \dots + \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 6 \cdot 4}{(2n-1)(2n-3)\dots 7 \cdot 5 \cdot 3} \rho^{2n-4} \right] + \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 7 \cdot 5 \cdot 3} \rho^{2n-2} P_1(\rho). \quad (133)$$

Полагая в (126) $n=1$, найдём:

$$P_1(\rho) = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-\rho^2}} = \sqrt{\sigma^2-\rho^2} \Big|_{\sigma=\rho}^{\sigma=1} = \sqrt{1-\rho^2}. \quad (134)$$

Подставляя (134) в (133), получим:

$$P_n(\rho) = \sqrt{1-\rho^2} \left[\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)(2n-3)} \rho^2 + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \rho^4 + \dots + \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 6 \cdot 4}{(2n-1)(2n-3)\dots 7 \cdot 5 \cdot 3} \rho^{2n-4} + \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1} \rho^{2n-2} \right],$$

или

$$P_n(\rho) = \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3} \left[\rho^{2n-2} + \frac{1}{2} \rho^{2n-4} + \frac{3}{2 \cdot 4} \rho^{2n-6} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-7)(2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-6)(2n-4)} \rho^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2)} \right] \sqrt{1-\rho^2}. \quad (135)$$

Подставляя (135) в (127), найдём:

$$p(r) = \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1)} \right]^2 \frac{Aa^{2n-1}}{\pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-4} + \frac{3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-6} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-7)(2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-6)(2n-4)} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2)} \right] \sqrt{1-\left(\frac{r}{a} \right)^2}, \quad 0 < r < a. \quad (136)$$

Из (119) следует:

$$\frac{Aa^{2n-1}}{\pi^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \frac{1}{4n} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n} \frac{P}{\pi a^2}. \quad (137)$$

Подставляя (137) в (136), получим:

$$p(r) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4) (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) (2n-1)} \frac{2n+1}{2} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-4} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-6} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-7) (2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-6) (2n-4)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-5) (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4) (2n-2)} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \frac{P}{\pi a^2}, \quad 0 < r < a. \quad (138)$$

Итак, формула (119) определяет радиус области контакта a ; после того как найдена постоянная a формула (121) даст возможность вычислить сближение тел при сжатии a , а формула (138) определит давление p в области контакта. Давление p меняется в зависимости от расстояния до первоначальной точки касания по тому же закону, что и в соответствующей плоской контактной задаче (см. формулу (46) и рис. 9 главы II).

До сих пор мы предполагали, что точка первоначального касания сжимаемых тел является регулярной точкой поверхностей обоих тел. Перейдём теперь к рассмотрению того случая, когда для поверхности одного из сжимаемых тел или для поверхностей обоих тел, подвергающихся сжатию, точка первоначального касания является особой точкой.

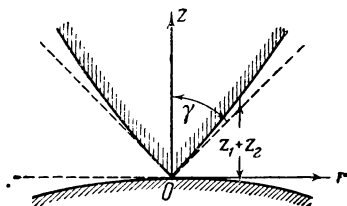


Рис. 43.

Рассмотрим сначала тот случай, когда точка первоначального касания сжимаемых тел является угловой точкой осевого сечения поверхности одного из тел, подвергающихся сжатию (рис. 43). Если касательная к образующей этой поверхности в угловой точке составляет с осью z угол γ , то, как видно из рис. 43, пренебрегая малыми высших порядков, будем в окрестности начала координат иметь:

$$z_1(r) + z_2(r) = r \operatorname{ctg} \gamma. \quad (139)$$

Подставляя (139) в (92), найдём:

$$a^2 \operatorname{ctg} \gamma \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

или, так как

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{4} a^2 \operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

откуда

$$a = \sqrt{2P (\vartheta_1 + \vartheta_2) \operatorname{tg} \gamma}. \quad (140)$$

Подставляя (139) в (80), найдём:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg} \gamma. \quad (141)$$

Подставляя (139) в (76), получим:

$$F(r) = \frac{\bar{z}}{\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} r \operatorname{ctg} \gamma \right). \quad (142)$$

Подставляя (142) в (78), найдём:

$$p(r) = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_r^a \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \ln (s - \sqrt{s^2 - r^2}) \Big|_{s=a}^{s=r} =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \ln \left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right). \quad (143)$$

Из (140) следует:

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \frac{2P}{a^2}. \quad (144)$$

Подставляя (144) в (143), найдём:

$$p(r) = -\frac{P}{\pi a^2} \ln \left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right), \quad 0 < r < a. \quad (145)$$

В рассматриваемом случае снова мы получаем ту же зависимость давления p от расстояния до первоначальной точки касания, что и в соответствующей плоской контактной задаче (см. формулу (107) и рис. 12а главы II). Давление $p(r)$ неограниченно возрастает, когда расстояние r до первоначальной точки касания стремится к нулю.

В заключение этого параграфа рассмотрим тот случай, когда осевые сечения поверхностей сжимаемых тел имеют в точке первоначального непрерывно вращающегося касательную, но кривизна одного или обоих указанных сечений в этой точке бесконечно велика. Мы ограничимся рассмотрением примера, в котором первоначальное расстояние

между точками, соприкасающимися при сжатии, $z_1 + z_2$ может быть представлено в окрестности начала координат соотношением

$$z_1(r) + z_2(r) = Ar^{3/2}, \quad 0 < r < a. \quad (146)$$

Подставляя (146) в (91), найдём:

$$\int_0^a \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma} d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{3A}. \quad (147)$$

Полагая в (147) $\sigma = at$, получим:

$$a^{5/2} \int_0^1 \frac{t^2 \sqrt{t} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{3A}. \quad (148)$$

Подставляя (146) в (79), найдём:

$$\alpha = \frac{3}{2} Aa \int_0^a \frac{\sqrt{\sigma} d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}},$$

или, полагая $\sigma = at$,

$$\alpha = \frac{3}{2} Aa^{3/2} \int_0^1 \frac{\sqrt{t} dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (149)$$

Определённые интегралы, входящие в формулы (148) и (149), — эллиптические, после приведения к каноническому виду они могут быть вычислены с помощью таблиц для эллиптических интегралов. Их значения таковы¹⁾:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t} dt}{\sqrt{1-t^2}} = J_1 = 1,1981, \quad \int_0^1 \frac{t^2 \sqrt{t} dt}{\sqrt{1-t^2}} = J_2 = 0,7189. \quad (150)$$

Подставляя (150) в (148) и (149), получим окончательные формулы:

$$a = \left[\frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{3J_2 A} \right]^{2/5}, \quad (151)$$

$$\alpha = \frac{3}{2} J_1 Aa^{3/2}. \quad (152)$$

Подставляя (146) в (75), найдём:

$$F(r) = \frac{2}{\pi (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - \frac{3}{2} Ar \int_0^r \frac{\sqrt{\sigma} d\sigma}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} \right). \quad (153)$$

¹⁾ См. Приложение 1, формулы (1) и (14).

Полагая в (153) $\sigma = rt$, получим:

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - \frac{3}{2} Ar^{3/2} \int_0^1 \frac{\sqrt{t} dt}{\sqrt{1-t^2}} \right),$$

или, согласно (150),

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - \frac{3}{2} J_1 Ar^{3/2} \right). \quad (154)$$

Подставляя (154) в (78), найдём:

$$p(r) = \frac{9J_1 A}{4\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_r^a \frac{\sqrt{s} ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a. \quad (155)$$

Полагая в (155) $s = \frac{r}{t}$, получим:

$$p(r) = \frac{9J_1 A \sqrt{r}}{4\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_{r/a}^1 \frac{dt}{t \sqrt{t(1-t^2)}}, \quad 0 < r < a. \quad (156)$$

Вводя обозначение

$$f(\rho) = \sqrt{\rho} \int_{\rho}^1 \frac{dt}{t \sqrt{t(1-t^2)}}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (157)$$

сможем придать формуле (156) вид:

$$p(r) = \frac{9J_1 A \sqrt{a}}{4\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} f\left(\frac{r}{a}\right), \quad 0 < r < a. \quad (158)$$

Из соотношения (151) следует:

$$\frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \frac{\pi P}{3J_2 a^2 \sqrt{a}}. \quad (159)$$

Подставляя (159) в (158) и полагая согласно (150) $\frac{J_2}{J_1} = 0,6$, найдём:

$$p(r) = 1,25 \frac{P}{\pi a^2} f\left(\frac{r}{a}\right), \quad 0 < r < a. \quad (160)$$

Определённый интеграл, входящий в формулу (157) и определяющий функцию $f(\rho)$, — эллиптический и после приведения к каноническому виду может быть рассчитан как функция переменного предела ρ с помощью таблиц для эллиптических интегралов¹⁾. Как показывают вычисления, зависимость давления p от расстояния r до первоначальной точки касания,

¹⁾ См. Приложение 1, п. 7.

определяемая формулой (160), та же, что и для соответствующей плоской контактной задачи, рассмотренной нами в главе II (см. рис. 11). Давление p остаётся ограниченным во всей области контакта, однако производная $\frac{dp}{dr}$ неограниченно возрастает по абсолютному значению, когда r стремится к нулю.

§ 3. Давление круглого цилиндрического штампа на упругое полупространство

Задача о давлении жёсткого штампа на упругое полупространство, которой посвящён настоящий параграф, отличается от контактных задач, рассмотренных в предыдущем параграфе, тем, что в этой задаче область контакта заранее предопределена формой штампа. Если обозначить через a радиус основания штампа (рис. 44), то область контакта штампа с упругой средой будет всегда круг радиуса a , независимо от того, какова сила, прижимающая штамп к упругому полупространству.

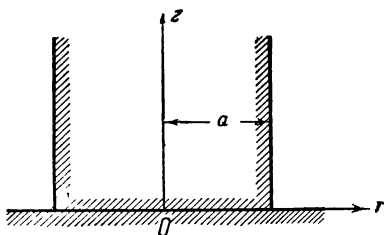


Рис. 44.

Первоначальное расстояние между точками сжимаемых тел, соприкасающимися при сжатии, которое мы обозначали в § 2 через $z_1 + z_2$, будет в рассматриваемой задаче равно нулю во всей области контакта:

$$z_1(r) + z_2(r) = 0, \quad 0 < r < a. \quad (161)$$

Подставляя (161) в (75), получим:

$$F(r) = \frac{2z}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad 0 < r < a. \quad (162)$$

Подставляя (162) в (74), найдём:

$$p(r) = \frac{a}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a. \quad (163)$$

Подставляя (163) в условие (82), получим:

$$\frac{2z}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \int_0^a \frac{r' dr'}{\sqrt{a^2 - r'^2}} = P,$$

или, так как

$$\int_0^a \frac{r' dr'}{\sqrt{a^2 - r'^2}} = -\sqrt{a^2 - r'^2} \Big|_0^a = a,$$

$$\frac{2a\alpha}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = P.$$

Полученное соотношение определяет сближение

$$\alpha = \frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2a}. \quad (164)$$

Подставляя (164) в (163), найдём:

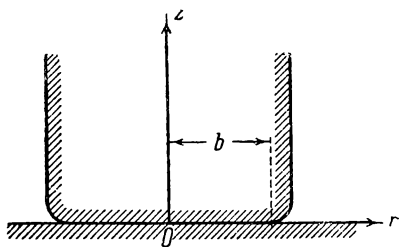


Рис. 45.

$$p(r) = 0,5 \frac{P}{\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}},$$

$$0 < r < a. \quad (165)$$

Мы получили ту же зависимость давления p от расстояния r до оси штампа, что и в соответствующей плоской контактной задаче (см. формулу (116) и рис. 13 главы II). На

границе основания штампа (при $r = a$) возникает согласно формуле (165) бесконечно большое давление p .

Чтобы получить картину распределения давления под штампом, близкую к реальной, будем, как и в главе II, предполагать, что край штампа имеет хотя и большую, но ограниченную кривизну (рис. 45).

Если через b обозначить радиус круга, в области которого осуществляется первоначальное касание штампа с упругим полупространством, то при сжатии радиус области контакта a примет значение, несколько превышающее его первоначальную величину b .

Для первоначального расстояния $z_1 + z_2$ между точками, соприкасающимися при сжатии, будем иметь выражение

$$\left. \begin{aligned} z_1(r) + z_2(r) &= 0, & 0 < r < b, \\ z_1(r) + z_2(r) &= A(r-b)^2, & b < r < a, \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

если пренебречь малыми высших порядков.

Подставляя (166) в (91), найдём:

$$2A \int_b^a \frac{(\sigma - b) \sigma^2 d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} = \frac{1}{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (167)$$

Полагая $\sigma = a \cos \varphi$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_b^a \frac{(\sigma - b) \sigma^2 d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} &= a^2 \int_0^{\varphi_0} (a \cos \varphi - b) \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= a^2 \left[a \int_0^{\varphi_0} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) - \frac{b}{2} \int_0^{\varphi_0} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right] = \\ &= a^2 \left[a \left(\sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 \right) - \frac{b}{2} \left(\varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \right) \right], \quad (168) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_0 = \arccos \frac{b}{a}. \quad (169)$$

Согласно (169)

$$a = \frac{b}{\cos \varphi_0}. \quad (170)$$

Подставляя (170) в (168), найдём:

$$\begin{aligned} \int_b^a \frac{(\sigma - b) \sigma^2 d\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} &= \\ &= b^3 \sec^3 \varphi_0 \left[\sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 - \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) \right] = \\ &= \frac{b^3}{6} \sec^3 \varphi_0 [\sin \varphi_0 (6 - 2 \sin^2 \varphi_0 - 3 \cos^2 \varphi_0) - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0] = \\ &= \frac{b^3}{6} \sec^3 \varphi_0 (3 \sin \varphi_0 + \sin^3 \varphi_0 - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0). \quad (171) \end{aligned}$$

Подставляя (171) в (167), получим уравнение

$$\sec^3 \varphi_0 (3 \sin \varphi_0 + \sin^3 \varphi_0 - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0) = \frac{3\pi P (\delta_1 + \delta_2)}{2Ab^3}, \quad (172)$$

определяющее угол φ_0 . Отыскав угол φ_0 , найдём по формуле (170) радиус области контакта a .

Подставляя (166) в (79), найдём:

$$\alpha = 2Aa \int_b^a \frac{\sigma - b}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} d\sigma,$$

или, полагая $\sigma = a \cos \varphi$,

$$\alpha = 2Aa \int_0^{\varphi_0} (a \cos \varphi - b) d\varphi = 2Aa (a \sin \varphi_0 - b\varphi_0). \quad (173)$$

Подставляя (170) в (173), получим:

$$\alpha = 2Ab^2 \sec \varphi_0 (\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0). \quad (174)$$

Отыскав из уравнения (172) угол φ_0 , найдём по формуле (174) приближение α .

Подставляя (166) в (75), найдём:

$$F(r) = \frac{2\alpha}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \text{при } 0 < r < b,$$

$$F(r) = \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - 2Ar \int_b^r \frac{\sigma - b}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma \right) \quad \text{при } b < r < a,$$

или, так как

$$\begin{aligned} \int_b^r \frac{\sigma - b}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= \left(-\sqrt{r^2 - \sigma^2} + b \operatorname{arccos} \frac{\sigma}{r} \right)_{\sigma=b}^{\sigma=r} = \\ &= \sqrt{r^2 - b^2} - b \operatorname{arccos} \frac{b}{r}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= \frac{2\alpha}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad \text{при } 0 < r < b, \\ F(r) &= \frac{2}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(\alpha - 2Ar\sqrt{r^2 - b^2} + 2Arb \operatorname{arccos} \frac{b}{r} \right) \\ &\quad \text{при } b < r < a. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Выполняя в (175) дифференцированные по r , получим:

$$\left. \begin{aligned} F'(r) &= 0 \quad \text{при } 0 < r < b, \\ F'(r) &= -\frac{4A}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(2\sqrt{r^2 - b^2} - b \operatorname{arccos} \frac{b}{r} \right) \\ &\quad \text{при } b < r < a. \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

Подставляя (176) в (78), найдём:

$$\left. \begin{aligned} p(r) &= \frac{2A}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^a \left(2\sqrt{s^2 - b^2} - b \operatorname{arccos} \frac{b}{s} \right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \\ &\quad \text{при } 0 < r < b, \\ p(r) &= \frac{2A}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} \int_r^a \left(2\sqrt{s^2 - b^2} - b \operatorname{arccos} \frac{b}{s} \right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \\ &\quad \text{при } b < r < a. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Полагая в (177)

$$s = \frac{b}{\cos \varphi},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} p(r) &= \frac{2Ab}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^{\varphi_0} \frac{(2 \operatorname{tg} \varphi - \varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2} \cos^2 \varphi}} \quad \text{при } 0 < r < b, \\ p(r) &= \frac{2Ab}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} \int_{\operatorname{arccos} \frac{b}{r}}^{\varphi_0} \frac{(2 \operatorname{tg} \varphi - \varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2} \cos^2 \varphi}} \quad \text{при } b < r < a, \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

так как согласно (169) $\operatorname{arccos} \frac{b}{a} = \varphi_0$.

Вводя обозначение

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^{\varphi_0} \frac{(2 \operatorname{tg} \varphi - \varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{при } 0 < x < 1, \\ \psi(x) &= \int_{\operatorname{arccos} \frac{1}{x}}^{\varphi_0} \frac{(2 \operatorname{tg} \varphi - \varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{при } 1 < x < \frac{1}{\cos \varphi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

сможем придать формуле (178) вид:

$$p(r) = \frac{2Ab}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} \psi\left(\frac{r}{b}\right), \quad 0 < r < a. \quad (180)$$

Из (172) находим:

$$\frac{2Ab}{\pi^2(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{3 \cos^3 \varphi_0}{3 \sin \varphi_0 + \sin^3 \varphi_0 - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0} \frac{P}{\pi b^2}. \quad (181)$$

Подставляя (181) в (180), получим:

$$p(r) = \frac{3 \cos^3 \varphi_0}{3 \sin \varphi_0 + \sin^3 \varphi_0 - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0} \psi\left(\frac{r}{b}\right) \frac{P}{\pi b^2}, \quad 0 < r < a. \quad (182)$$

Формула (182) совместно с соотношениями (179) определяет распределение давления в области контакта. На рис. 46 показаны графики давления $p(r)$, соответствующие различным значе-

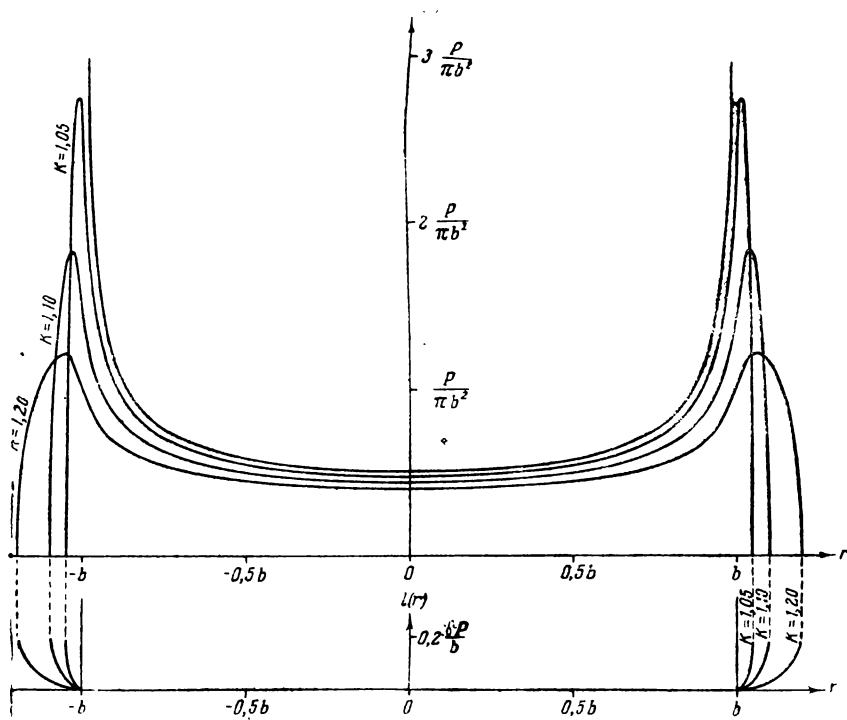


Рис. 46.

ниям отношения $k = \frac{a}{b}$, т. е. различным значениям угла φ , фигурирующего в формулах (182) и (179). Подсчёт определённых интегралов, фигурирующих в формулах (179), производился по приближённой формуле Симпсона.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

§ 1. Потенциал эллиптического диска

Как мы уже видели выше, плоская и осесимметричная контактные задачи теории упругости приводят к уравнениям, для которых можно построить общие решения в замкнутом виде. При отсутствии радиальной симметрии пространственная контактная задача теории упругости оказывается несравненно сложнее. Те её решения, которые мы излагаем в этой книге, основаны на некоторых свойствах потенциала эллиптического диска, к рассмотрению которых мы и переходим.

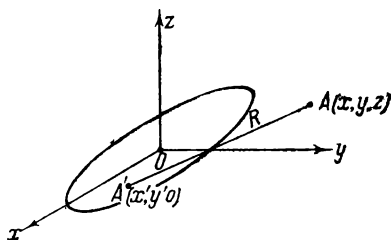


Рис. 47.

Построим систему прямоугольных координат x, y, z , совместив плоскость xOy с плоскостью эллиптического диска (рис. 47). Тогда, согласно определению ньютонова потенциала, потенциал $V(x, y, z)$ эллиптического диска в точке A с координатами x, y, z будет равен:

$$V(x, y, z) = \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x', y') dx' dy'}{R}, \quad (1)$$

где $\rho(x', y')$ — плотность в точке A' с координатами x', y' , 0 , R — расстояние между точками A и A' , Σ — область интегрирования, представляющая собой часть плоскости xOy , занятую эллиптическим диском.

В частности, если точка A лежит на поверхности диска, то

$$z = 0, \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

и согласно (1)

$$V(x, y, 0) = \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \quad (2)$$

Если полуоси эллипса, ограничивающего эллиптический диск, обозначить через a и b , то при соответствующем расположении осей x и y уравнение этого эллипса будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Как мы ниже показываем, если плотность $p(x', y')$ имеет при этом вид:

$$p(x', y') = \frac{\sum_{m=0}^n a_m \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^m}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}}, \quad (4)$$

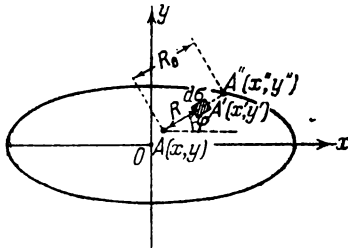


Рис. 48.

где a_0, a_1, \dots, a_n — постоянные коэффициенты, то потенциал эллиптического диска на его поверхности, определяемый формулой (2), выражается полиномом от координат x и y степени $2n$. На этом свойстве

потенциала эллиптического диска и основаны решения контактных задач, изложенные в последующих параграфах. Переходим к доказательству указанного свойства потенциала эллиптического диска.

Подставляя (4) в (2), найдём:

$$V(x, y, 0) = \sum_{m=0}^n a_m f_m(x, y), \quad (5)$$

где

$$f_m(x, y) = \iint_{\Sigma} \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^{m-\frac{1}{2}} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}, \quad (6)$$

$$m = 0, 1, \dots, n.$$

Перейдём в кратном интеграле (6) от прямоугольных координат x', y' к полярным координатам R, φ с началом в точке A с координатами x, y (рис. 48). Как видно из рис. 48,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + R \cos \varphi, \\ y' &= y + R \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

вместо элемента площади $dx' dy'$ будем иметь элемент площади $d\sigma = R dR d\varphi$, и формула (6) примет вид:

$$f_m(x, y) = \int_{\varphi_1}^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} \left[1 - \frac{(x + R \cos \varphi)^2}{a^2} - \frac{(y + R \sin \varphi)^2}{b^2}\right]^{m-\frac{1}{2}} dR, \quad (8)$$

где $R_0(\varphi)$ — расстояние между точками A и A'' на рис. 48. Так как точка A'' лежит на эллипсе с полуосями a и b , её координаты x'' , y'' должны удовлетворять соотношению

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

В то же время, как видно из рис. 48,

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + R_0 \cos \varphi, \\ y'' &= y + R_0 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим уравнение

$$\frac{1}{a^2}(x + R_0 \cos \varphi)^2 + \frac{1}{b^2}(y + R_0 \sin \varphi)^2 = 1,$$

или

$$L(\varphi)R_0^2 + 2M(\varphi)R_0 - N = 0, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L(\varphi) &= \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}, \\ M(\varphi) &= \frac{x \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \varphi}{b^2}, \\ N &= 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Заметим, что

$$N > 0, \quad (13)$$

так как точка с координатами x , y лежит внутри эллипса.

Решая уравнение (11), получим:

$$R_0(\varphi) = \frac{-M(\varphi) \pm \sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}{L(\varphi)}. \quad (14)$$

Как видно из (12),

$$L(\varphi) > 0 \quad \text{при } 0 < \varphi < 2\pi. \quad (15)$$

В силу неравенств (13) и (15) будем иметь:

$$\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)} > |M(\varphi)|. \quad (16)$$

Таким образом, из двух решений квадратного уравнения (11), определяемых формулой (14), одно всегда положительное, другое отрицательное. Чтобы получить интересующее нас положительное решение уравнения (11), следует взять перед корнем в формуле (14) знак плюс. Итак, окончательно найдём:

$$R_0(\varphi) = \frac{-M(\varphi) + \sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}{L(\varphi)}. \quad (17)$$

Формуле (8) можно придать вид:

$$f_m(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2R \left(\frac{x \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \varphi}{b^2} \right) - R^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \right]^{m-\frac{1}{2}} dR = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} \left[N - 2RM(\varphi) - R^2 L(\varphi) \right]^{m-\frac{1}{2}} dR,$$

согласно обозначениям (12), или

$$\begin{aligned} f_m(x, y) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} L^{\frac{1}{2}-m}(\varphi) [NL(\varphi) - 2RL(\varphi)M(\varphi) - R^2L^2(\varphi)]^{m-\frac{1}{2}} dR = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} L^{\frac{1}{2}-m}(\varphi) \{M^2(\varphi) + NL(\varphi) - [M(\varphi) \mp RL(\varphi)]^2\}^{m-\frac{1}{2}} dR = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} \mp N \right]^{m-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left[\frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} \right]^2 \right\}^{m-\frac{1}{2}} dR. \end{aligned} \quad (18)$$

(Согласно неравенствам (13) и (15) подкоренное выражение в формуле (18) существенно положительное.)

Так как $0 \leq R \leq R_0(\varphi)$, а функция $L(\varphi)$ согласно (15) положительна, будем иметь:

$$\frac{M(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} \leq \frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} \leq \frac{M(\varphi) + R_0(\varphi)L(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}. \quad (19)$$

Но согласно (16)

$$\frac{M(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} > -1, \quad (20)$$

а согласно (17)

$$\frac{M(\varphi) + R_0(\varphi)L(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} = 1. \quad (21)$$

Из соотношений (19), (20) и (21) вытекает:

$$-1 < \frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} < 1, \quad (22)$$

следовательно, вместо переменной интегрирования R можно взять новую переменную ϑ , положив

$$\cos \vartheta = \frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} \quad (0 \leq \vartheta < \pi). \quad (23)$$

Из (23) находим:

$$-\sin \vartheta d\vartheta = \frac{L(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} dR, \quad (24)$$

$$dR = -\sqrt{\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}.$$

Из соотношений (23) и (21) следует:

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0(\varphi). \quad (25)$$

Производя в (18) замену переменной интегрирования R на ϑ , будем согласно (23), (24) и (25) иметь:

$$f_m(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta, \quad (26)$$

где $\vartheta(\varphi)$ — то значение, которое принимает переменная интегрирования ϑ , когда $R=0$. Из (23) находим:

$$\cos \vartheta(\varphi) = \frac{M(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}. \quad (27)$$

Полагая

$$\varphi = \pi + \psi, \quad (28)$$

найдем:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\vartheta(\pi+\psi)} \frac{1}{\sqrt{L(\pi+\psi)}} \left[\frac{M^2(\pi+\psi)}{L(\pi+\psi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя (28) в (12), получим:

$$L(\pi + \psi) = L(\psi), \quad M(\pi + \psi) = -M(\psi). \quad (30)$$

Подставляя (28) в (27) и принимая во внимание (30), будем иметь:

$$\cos \vartheta(\pi + \psi) = -\cos \vartheta(\psi),$$

откуда

$$\vartheta(\pi + \psi) = \pi - \vartheta(\psi). \quad (31)$$

Подставляя (30) и (31) в (29), найдём:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi-\theta(\psi)} \frac{1}{\sqrt{L(\psi)}} \left[\frac{M^2(\psi)}{L(\psi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (32)$$

Полагая в (32) $\vartheta = \pi - \vartheta'$, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\psi \int_{\theta(\psi)}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{L(\psi)}} \left[\frac{M^2(\psi)}{L(\psi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta' d\vartheta'. \end{aligned} \quad (33)$$

Пользуясь соотношением (33), сможем придать формуле (26) вид:

$$\begin{aligned} f_m(x, y) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta + \\ + \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta + \\ + \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\theta(\varphi)}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

или окончательно

$$f_m(x, y) = c_m \int_0^{\pi} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N \right]^m \frac{d\varphi}{\sqrt{L(\varphi)}}, \quad (34)$$

где

$$c_m = \int_0^{\pi} \sin^{2m} \vartheta d\vartheta. \quad (35)$$

Подставляя (12) в (34), получим:

$$\begin{aligned}
 f_m(x, y) &= c_m ab \int_0^\pi \left[\frac{(xb^2 \cos \varphi + ya^2 \sin \varphi)^2}{a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)} + 1 - \frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 b^2} \right]^m \times \\
 &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \\
 &= c_m ab \int_0^\pi \left[1 - \frac{(b^2 x^2 + a^2 y^2)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - (xb^2 \cos \varphi + ya^2 \sin \varphi)^2}{a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)} \right]^m \times \\
 &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \\
 &= c_m ab \int_0^\pi \left[1 - \frac{x^2 a^2 b^2 \sin^2 \varphi + y^2 a^2 b^2 \cos^2 \varphi - 2xy a^2 b^2 \sin \varphi \cos \varphi}{a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)} \right]^m \times \\
 &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},
 \end{aligned}$$

или окончательно

$$f_m(x, y) = c_m ab \int_0^\pi \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right]^m \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (5), найдём:

$$\begin{aligned}
 V(x, y, 0) &= \\
 &= ab \int_0^\pi \sum_{m=0}^n a_m c_m \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right]^m \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Перейдём теперь к вычислению коэффициентов c_m в формуле (37). Выполняя в формуле (35) интегрирование по частям, найдём:

$$\begin{aligned}
 c_m &= - \int_0^\pi \sin^{2m-1} \vartheta d(\cos \vartheta) = - \sin^{2m-1} \vartheta \cos \vartheta \Big|_0^\pi + \\
 &\quad + (2m-1) \int_0^\pi \sin^{2m-2} \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = (2m-1) \left(\int_0^\pi \sin^{2m-2} \vartheta d\vartheta - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\pi \sin^{2m} \vartheta d\vartheta \right) = (2m-1) c_{m-1} - (2m-1) c_m,
 \end{aligned}$$

откуда

$$c_m = \frac{2m-1}{2m} c_{m-1}. \quad (38)$$

Полагая в (38) вместо m $m-1$, $m-2$ и т. д., получим соотношения

$$c_{m-1} = \frac{2m-3}{2m-2} c_{m-2}, \quad (39)$$

$$c_{m-2} = \frac{2m-5}{2m-4} c_{m-3}, \quad (40)$$

и т. д. Подставляя (39) в (38), найдём:

$$c_m = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)} c_{m-2}. \quad (41)$$

Подставляя (40) в (41), получим:

$$c_m = \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)}{2m(2m-2)(2m-4)} c_{m-3}. \quad (42)$$

Продолжая этот процесс, придём к формуле

$$c_m = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\dots 4 \cdot 2} c_0. \quad (43)$$

Полагая в (35) $m=0$, найдём:

$$c_0 = \int_0^\pi d\vartheta = \pi. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получим:

$$c_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)(2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2) 2m} \pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (45)$$

Подставляя (44) и (45) в (37), найдём:

$$V(x, y, 0) = \pi ab \int_0^\pi \left\{ a_0 + \sum_{m=1}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)(2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2) 2m} a_m \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right]^m \right\} \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (46)$$

Итак, потенциал эллиптического диска выражается на поверхности этого диска формулой (46), если плотность ρ выражается формулой (4). Полученное нами для искомого потенциала выражение (46) действительно представляет по отношению к переменным x и y полином степени $2n$, что и требовалось показать.

§ 2. Давление эллиптического штампа на упругое полупространство

В главе III мы рассмотрели задачу о давлении кругового цилиндрического штампа на упругое полупространство. В этой главе мы рассматриваем задачу о давлении на упругое полупространство жёсткого цилиндрического штампа с эллиптическим сечением.

Обозначим через a и b (условимся, что $a \leq b$) полуоси эллипса, ограничивающего основание штампа, и построим систему прямоугольных координат x, y, z таким образом, чтобы уравнение кривой, ограничивающей область контакта штампа с полупространством, имело вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

и чтобы упругое полупространство охватывало отрицательную полуось z (рис. 49). Обозначим далее через $p(x, y)$ нормальное давление, возникающее под штампом в точке с координатами x, y (основание штампа мы будем считать идеально гладким). Под действием указанного давления точка поверхности упругого полупространства с координатами x, y должна совершить упругое перемещение с проекцией u_z на оси z , равной (см. формулу (69) в главе III):

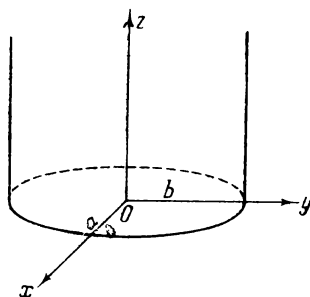


Рис. 49.

$$u_z = -\delta \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}, \quad (47)$$

где $\delta = \frac{1-\mu^2}{\pi E}$, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона упругой среды, Σ — область, в которой действует давление $p(x, y)$, в нашем случае область, ограниченная эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначим далее через α поступательное перемещение, которое совершает штамп в направлении отрицательной полуоси z при сжатии. Каждая точка упругого полупространства, находящаяся в контакте со штампом, должна при сжатии претерпеть упругое перемещение в направлении отрицательной полуоси z , равное α , т. е. во всей области контакта должно выполняться условие

$$u_z = -\alpha. \quad (48)$$

Сравнивая соотношения (47) и (48), найдём, что в области контакта должно выполняться условие

$$\int_{\Sigma} \frac{\rho(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \frac{\alpha}{\theta}. \quad (49)$$

Выражение, стоящее в левой части соотношения (49), в точке с координатами $x, y, 0$ определяет потенциал $V(x, y, 0)$ эллиптического диска с плотностью ρ (см. формулу (2)), в правой части равенства (49) стоит постоянное отношение $\frac{\alpha}{\theta}$.

Таким образом, задача отыскания давления p под штампом эквивалентна отысканию той плотности ρ , при которой потенциал эллиптического диска сохраняет на его поверхности постоянное значение. В предыдущем параграфе мы показали, что если плотность ρ определяется формулой (4), то потенциал диска $V(x, y, 0)$ определяется формулой (46), представляет собой многочлен степени $2n$ по отношению к переменным x и y и, в частности, при $n=0$ сохраняет постоянное значение: Полагая в (4) и (46) $n=0$ найдём:

$$\rho(x', y') = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}}. \quad (50)$$

$$V(x, y, 0) = \pi a b a_0 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (51)$$

Итак, если для давления $p(x', y')$ принять выражение (50), то кратный интеграл, стоящий в левой части соотношения (49), будет сохранять постоянное значение, определяемое формулой (51). Таким образом, для того чтобы в области контакта выполнялось условие (49), достаточно, чтобы это постоянное значение было равно $\frac{\alpha}{\theta}$. Отсюда получаем соотношение

$$\pi a b a_0 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{\alpha}{\theta}, \quad (52)$$

связывающее коэффициент a_0 , фигурирующий в полученном для давления p выражении (50), и сближение штампа с упругой средой α .

Обозначим через P силу, прижимающую штамп к упругому полупространству. Эта сила должна уравниваться реакцией упругого полупространства. Следовательно, проинтегри-

ровав давление p по всей области контакта, мы должны получить силу P :

$$\iint_{\Sigma} p(x', y') dx' dy' = P. \quad (53)$$

Подставляя (50) в (53), получим соотношение

$$a_0 \iint_{\Sigma} \frac{dx' dy'}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}} = P. \quad (54)$$

Формулы (54) и (52) определяют постоянную a_0 и сближение α . Чтобы вычислить кратный интеграл, входящий в формулу (54), перейдём в нём от прямоугольных координат x' , y' к полярным координатам r , φ , полагая

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi.$$

Найдём:

$$\iint_{\Sigma} \frac{dx' dy'}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0(\varphi)} \frac{r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) r^2}}. \quad (55)$$

Предел интегрирования $r_0(\varphi)$ определяется тем условием, что точка с прямоугольными координатами

$$x' = r_0 \cos \varphi, \quad y' = r_0 \sin \varphi,$$

должна лежать на эллипсе

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Отсюда

$$r_0^2(\varphi) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) = 1. \quad (56)$$

Выполняя в (55) интегрирование по r и принимая во внимание соотношение (56), найдём:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{dx' dy'}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}} &= \\ &= - \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) r^2} \Big|_{r=0}^{r=r_0(\varphi)} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} = \\ &= a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = 2a^2 b^2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \quad (57) \end{aligned}$$

так как в последнем определённом интеграле подинтегральная функция имеет период π . Полагая далее $\varphi = \pi - \psi$, найдём:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (58)$$

Введём в последнем определённом интеграле вместо переменной интегрирования φ новую переменную интегрирования t , положив

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} t.$$

Находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \varphi d\varphi}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{b}{a} dt}{b^2 t^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2ab}. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя (59) в (58), получим:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\pi}{ab}. \quad (60)$$

Подставляя (60) в (57), найдём:

$$\iint_{\Sigma} \frac{dx' dy'}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}} = 2\pi ab, \quad (61)$$

Пользуясь формулой (61), получим из соотношения (54) значение постоянной a_0 :

$$a_0 = \frac{P}{2\pi ab}. \quad (62)$$

Подставляя (62) в (50), найдём окончательное выражение для давления $p(x, y)$ в области контакта:

$$p(x, y) = \frac{P}{2\pi ab \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}. \quad (63)$$

Подставляя (62) в (52), определим перемещение штампа при сжатии α :

$$\alpha = \frac{P\vartheta}{2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (64)$$

Формуле (64) можно придать вид:

$$\alpha = \frac{P\vartheta}{2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}} = \frac{P\vartheta}{2b} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (65)$$

где

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (66)$$

— эксцентриситет эллипса (мы условились, что $a \leq b$). Так как подинтегральная функция в (65) остаётся неизменной при замене φ на $\pi - \varphi$,

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

и формуле (65) можно придать вид:

$$\alpha = \frac{P\vartheta}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (67)$$

Как мы уже неоднократно отмечали, определённый интеграл

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (68)$$

называют эллиптическим интегралом первого рода с модулем k . В том случае, если верхний предел x равен единице, эллиптический интеграл называют полным и обозначают:

$$F(1, k) = K(k). \quad (68')$$

Полагая $\sin \varphi = x$, найдём:

$$d\varphi = \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2 x^2)}} = K(e). \quad (69)$$

Формуле (67) можно, таким образом, придать вид:

$$\alpha = \frac{P\delta}{b} K(e). \quad (70)$$

Перемещение штампа при сжатии α выражается через полный эллиптический интеграл первого рода с модулем, равным эксцентриситету эллипса, ограничивающего основание штампа.

Формулы (63) и (70) полностью решают контактную задачу, рассматриваемую в этой главе, определяя давление под штамп $p(x, y)$ и сближение штампа с упругой средой α . Как видно из формулы (63), когда точка с координатами x, y приближается к эллипсу, ограничивающему основание штампа, знаменатель в выражении, определяющем давление $p(x, y)$, стремится к нулю, и давление $p(x, y)$ неограниченно возрастает. В рассматриваемой нами контактной задаче сечение штампа плоскостью, проходящей через ось z , имеет у основания штампа прямые углы (см. рис. 49). В действительности у всякого реального штампа такое сечение будет иметь у основания штампа хотя и большую, но ограниченную кривизну. В этом случае давление $p(x, y)$ хотя и может достигать у краёв основания штампа больших значений, но всё же остаётся ограниченным во всей области контакта. Рассматривая плоскую и осесимметричную контактные задачи, мы детально рассмотрели этот вопрос. При отсутствии радиальной симметрии этот вопрос в пространственной контактной задаче приводит, к сожалению, к большим математическим трудностям, и детальнее мы на нём не останавливаемся.

§ 3. Сжатие двух упругих тел, первоначально касающихся в точке

В главе III мы рассмотрели задачу о сжатии двух упругих тел, первоначально касающихся в точке, для того случая, когда оба сжимаемых тела имеют общую ось радиальной симметрии. В этой главе мы рассматриваем общий случай этой задачи, предполагая, что сжимаемые тела имеют произвольную конфигурацию.

Построим систему прямоугольных координат x, y, z , расположив начало координат в точке первоначального касания сжимаемых тел и совместив плоскость xOy с общей касательной плоскостью к поверхностям сжимаемых тел в точке их касания (рис. 50). Пусть

$$\left. \begin{aligned} z &= f_1(x, y), \\ z &= -f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

— уравнения поверхностей, ограничивающих сжимаемые тела.

Пусть, далее, A_1 и A_2 — две точки этих поверхностей, соприкасающиеся при сжатии; A_1B_1 и A_2B_2 — упругие перемещения этих точек (см. рис. 50). Точки B_1 и B_2 совмещаются при сжатии за счёт поступательных перемещений сжимаемых тел, вызывающих сближение их, которое мы будем обозначать через α . Будем в дальнейшем предполагать, что равнодействующие сжимающих сил лежат на оси z , и указанное сближение сжимаемых тел при сжатии осуществляется вдоль оси z . При этих предположениях отрезок B_1B_2 на рис. 50 должен быть параллелен оси z . Обозначим через z_1 и z_2 координаты z точек A_1 и A_2 . Тогда координаты z точек B_1 и B_2 будут равны $z_1 + u_{1z}$ и $z_2 + u_{2z}$, где u_{1z} и u_{2z} — проекции упругих перемещений точек A_1 и A_2 на ось z . Расстояние между точками B_1 и B_2 равно, таким образом, $z_1 + u_{1z} - (z_2 + u_{2z})$. С другой стороны, это же расстояние равно сближению сжимаемых тел α . Следовательно, для каждой пары точек, соприкасающихся при сжатии, должно соблюдаться условие

$$z_1 + u_{1z} - (z_2 + u_{2z}) = \alpha. \quad (72)$$

Обозначим, далее, через x, y соответствующие координаты точек B_1 и B_2 . Ввиду малости упругих перемещений можно приближённо положить:

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = -f_2(x, y), \quad (73)$$

в соответствии с уравнениями поверхностей сжимаемых тел (71). Подставляя (73) в (72), получим:

$$u_{1z} - u_{2z} = \alpha - f_1(x, y) - f_2(x, y). \quad (74)$$

Обозначим, далее, через Σ проекцию области контакта на плоскость xOy и через $p(x, y)$ — нормальное давление в точке

контакта с координатами x, y . Будем считать в дальнейшем поверхности сжимаемых тел абсолютно гладкими и примем перемещение u_{2z} приближённо равным тому перемещению, которое совершает в направлении оси z точка упругого пространства $z < 0$ с координатами $x, y, 0$ под влиянием нормального давления $p(x, y)$, действующего в области Σ . Тогда

$$u_{2z} = -\vartheta_2 \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (75)$$

(см. формулу (47)), где $\vartheta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2}$, E_2 — модуль упругости, μ_2 — коэффициент Пуассона для второго из сжимаемых тел.

При аналогичных допущениях будем иметь:

$$u_{1z} = \vartheta_1 \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}, \quad (76)$$

где $\vartheta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1}$, E_1 — модуль упругости, μ_1 — коэффициент Пуассона для первого из сжимаемых тел.

Подставляя (75) и (76) в (74), найдём, что в области Σ должно выполняться условие

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \frac{\alpha - f_1(x, y) - f_2(x, y)}{\vartheta_1 + \vartheta_2}; \quad (77)$$

Так как по условию начало координат является регулярной точкой для поверхностей сжимаемых тел, функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ в уравнениях этих поверхностей (71) могут быть разложены в степенные ряды в окрестности начала координат:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots, \\ f_2(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Так как поверхности сжимаемых тел проходят через начало координат и касаются плоскости xOy , будем иметь:

$$a_0 = a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = b_2 = 0. \quad \text{[(79)]}$$

Принимая во внимание (79), найдём из (78):

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = (a_{11} + b_{11})x^2 + (a_{12} + b_{12})xy + (a_{22} + b_{22})y^2 + \dots \quad (80)$$

Направление координатных осей x и y мы до сих пор оставляли произвольным. Ориентируем теперь эти координатные оси таким образом, чтобы в разложении (80) обратился в нуль коэффициент при xy и имело место неравенство $a_{11} + b_{11} \geq a_{22} + b_{22}$,

т. е. чтобы выполнялись условия

$$a_{12} + b_{12} = 0, \quad a_{11} + b_{11} \geq a_{22} + b_{22}. \quad (81)$$

Будем предполагать, что при этом ни один из коэффициентов $a_{11} + b_{11}$ и $a_{22} + b_{22}$ не обращается в нуль. Тогда, если пренебречь в разложении (80) малыми высших порядков (исходя из малости области контакта), будем в области Σ иметь:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = (a_{11} + b_{11})x^2 + (a_{22} + b_{22})y^2. \quad (82)$$

Подставляя (82) в (77), найдём, что в области Σ должно выполняться условие

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \frac{a - Ax^2 - By^2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (83)$$

где

$$A = a_{11} + b_{11}, \quad B = a_{22} + b_{22} \quad (A \geq B). \quad (84)$$

Проинтегрировав давление $p(x', y')$ по области Σ , мы должны получить равнодействующую внешних сжимающих сил, действующих на каждое из сжимаемых тел. Обозначая эту равнодействующую через P , получим условие

$$\iint_{\Sigma} p(x', y') dx' dy' = P. \quad (85)$$

Итак, чтобы решить рассматриваемую контактную задачу, надлежит отыскать область Σ , давление $p(x, y)$ и сближение α , исходя из условий (83) и (85).

Выражение, стоящее в левой части соотношения (83), определяет в точке с координатами x, y, O потенциал диска с плотностью p , покрывающего в плоскости xOy область Σ . В правой части соотношения (84) стоит многочлен второй степени от x и y . Как мы показали в § 1, если диск ограничен эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (86)$$

а плотность p определяется формулой (4), потенциал диска $V(x, y, O)$ является многочленом степени $2n$ по отношению к переменным x и y , определяемым формулой (46). Полагая в формулах (4) и (46) $n=1$, найдём, что интеграл, стоящий в левой части соотношения (84), будет в области Σ равен:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\ & = \frac{\pi}{2} ab a_1 \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right] \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (87)$$

если в качестве области Σ принять часть плоскости xOy , ограниченную эллипсом (86), а для давления $p(x', y')$ принять выражение

$$p(x', y') = a_1 \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}. \quad (88)$$

Коэффициент a_0 в формулах (4) и (46) мы приняли равным нулю с тем, чтобы для давления $p(x', y')$ получить выражение, ограниченное во всей области Σ .

Соотношению (87) можно придать вид:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = J_0 - J_1 x^2 + J_2 xy - J_3 y^2, \quad (89)$$

где

$$J_0 = \frac{\pi}{2} aba_1 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (90)$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2} aba_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}}, \quad (91)$$

$$J_2 = \pi aba_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (92)$$

$$J_3 = \frac{\pi}{2} aba_1 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (93)$$

Как мы уже показали в предыдущей главе,

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{2}{b} K(e) \quad (94)$$

(сравните формулы (64) и (70)), где

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (95)$$

— эксцентриситет эллипса, ограничивающего область Σ (в предположении, что $a \leq b$),

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (96)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода с модулем e . Подставляя (94) в (90), найдём:

$$J_0 = \pi a a_1 K(e). \quad (97)$$

Формуле (91) можно придать вид:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\pi}{2} a b a_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{[b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 \varphi]^{3/2}} = \frac{\pi a a_1}{2b^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\ &= \frac{\pi a a_1}{2b^2 e^2} \left[\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right] = \\ &= \frac{\pi a a_1}{b^2 e^2} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right], \quad (98) \end{aligned}$$

так как в этих определённых интегралах подинтегральная функция остаётся неизменной при замене φ на $\pi - \varphi$. Чтобы преобразовать формулу (98), воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right) &= \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{e^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi + e^2 \sin^4 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{e^2 - 1 + (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{e^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{e^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1 - e^2}{e^2} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (99) \end{aligned}$$

Интегрируя обе части тождества (99) по φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, найдём:

$$0 = \frac{1}{e^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1 - e^2}{e^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}},$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{1 - e^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (100)$$

Определённый интеграл, фигурирующий в правой части формулы (100), называют полным эллиптическим интегралом второго рода с модулем e и обозначают через $E(e)$:

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (101)$$

Таким образом, формуле (100) можно придать вид:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{E(e)}{1-e^2}. \quad (102)$$

Согласно (96) и (102) формулу (98) можно представить в форме

$$J_1 = \frac{\pi a a_1}{b^2 e^2 (1-e^2)} [E(e) - (1-e^2) K(e)]$$

или согласно (95):

$$J_1 = \frac{\pi a_1}{a e^2} [E(e) - (1-e^2) K(e)]. \quad (103)$$

Перейдём к вычислению определённого интеграла J_2 (см. формулу (92)). Находим:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{(b^2 - a^2) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0,$$

откуда

$$J_2 = 0. \quad (104)$$

Из формул (91) и (93) находим:

$$\begin{aligned} J_1 + J_3 &= \frac{\pi}{2} a b a_1 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{\pi a a_1}{2 b^2} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\ &= \frac{\pi a a_1}{b^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{\pi a a_1}{b^2 (1-e^2)} E(e) \end{aligned}$$

согласно (102), или:

$$J_1 + J_3 = \frac{\pi a_1}{a} E(e) \quad (105)$$

в соответствии с (95). Подставляя значение J_1 из (103) в (105), найдём:

$$J_3 = \frac{\pi a_1}{a e^2} [e^2 E(e) - E(e) + (1-e^2) K(e)],$$

или окончательно:

$$J_3 = \frac{\pi a_1 (1-e^2)}{a e^2} [K(e) - E(e)]. \quad (106)$$

Подставляя (97), (103), (104) и (106) в (89), найдём:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \pi a_1 \left\{ a K(e) - \frac{1}{a e^2} [E(e) - (1-e^2) K(e)] x^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-e^2}{a e^2} [K(e) - E(e)] y^2 \right\}. \quad (107) \end{aligned}$$

Итак, если для давления $p(x', y')$ принять выражение (88), кратный интеграл, стоящий в левой части соотношения (83), будет определяться формулой (107). Для того чтобы при этом выполнялось условие (83), достаточно, чтобы многочлены, стоящие в правых частях соотношений (83) и (107), были между собой тождественно равны. Сравнивая между собой коэффициенты этих многочленов, получим условия

$$\pi a a_1 K(e) = \frac{a}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (108)$$

$$\frac{\pi a_1}{a e^2} [E(e) - (1 - e^2) K(e)] = \frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (109)$$

$$\frac{\pi a_1}{a e^2} (1 - e^2) [K(e) - E(e)] = \frac{B}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (110)$$

Подставляя (88) в (85), получим дополнительное условие

$$a_1 \iint_{\Sigma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' = P. \quad (111)$$

Чтобы вычислить кратный интеграл, входящий в формулу (111), перейдём в нём от прямоугольных координат x', y' к полярным координатам r, φ , полагая

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi.$$

Найдём:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0(\varphi)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) r^2} r dr, \end{aligned} \quad (112)$$

где предел интегрирования $r_0(\varphi)$ определяется условием

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1. \quad (113)$$

Выполняя в (112) интегрирование по r и принимая во внимание соотношение (113), найдём:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' &= \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[1 - r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \right]^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=r_0} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} = \\ &= \frac{a^2 b^2}{3} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2a^2 b^2}{3} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (114)$$

так как в последнем определённом интеграле подинтегральная функция имеет период π . Подставляя (60) в (114), получим:

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy' = \frac{2}{3} \pi ab. \quad (115)$$

Подставляя (115) в (114), найдём:

$$a_1 = \frac{3P}{2\pi ab}. \quad (116)$$

Итак, мы получили четыре соотношения (108), (109), (110) и (116) для определения полуосей эллипса a и b , сближения a и постоянной a_1 , входящей в формулу (88) для давления p .

Из соотношений (109) и (110) находим:

$$\frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{(1 - e^2) [K(e) - E(e)]} = \frac{A}{B},$$

или:

$$\left(\frac{1}{e^2} - 1\right) \left[\frac{K(e)}{E(e)} - 1\right] = \frac{B}{A+B}. \quad (117)$$

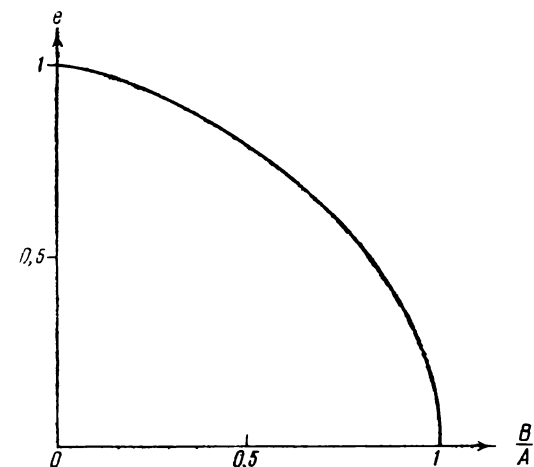


Рис. 51.

Уравнение (117) определяет эксцентриситет эллипса e по заданному отношению $\frac{B}{A}$. Заметим, что отношение $\frac{B}{A}$, а следовательно, и эксцентриситет эллипса, ограничивающего область контакта, определяются лишь конфигурацией сжимаемых тел (см. формулы (84) и (80)). На рис. 51 показана зависимость эксцентриситета e от отношения $\frac{B}{A}$ (напомним, что отношение $\frac{B}{A}$ не превосходит единицы).

Подставляя (116) в (110) и заменяя в (110) разность $1 - e^2$ отношением $\frac{a^2}{b^2}$, найдём:

$$\frac{3P}{2e^2 b^3} [K(e) - E(e)] = \frac{B}{\vartheta_1 + \vartheta_2},$$

или согласно (117):

$$\frac{3PE(e)}{2(1-e^2)b^3} = \frac{A+B}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad (118)$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3E(e)(\vartheta_1 + \vartheta_2)P}{2(1-e^2)(A+B)}}. \quad (119)$$

Отыскав из уравнения (117) эксцентриситет e , мы по формуле (119) найдём большую полуось эллипса b . Зная большую полуось эллипса b и его эксцентриситет e , найдём малую полуось эллипса a по формуле

$$a = b\sqrt{1-e^2}. \quad (120)$$

Подставляя (116) в (88), получим окончательную формулу для давления $p(x, y)$ в области контакта:

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (121)$$

Подставляя (116) в (108), получим формулу для сближения α :

$$\alpha = \frac{3}{2} K(e) \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)P}{b}. \quad (122)$$

Формулы (117), (119), (120), (121) и (122) полностью решают рассматриваемую контактную задачу теории упругости, последовательно определяя конфигурацию области контакта, давление в области контакта и сближение сжимаемых тел при сжатии.

При $B=A$, т. е. в том случае, если первоначальное расстояние между точками, соприкасающимися при сжатии, согласно формулам (82) и (84) равно:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = Ar^2 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (123)$$

эксцентриситет e эллипса, ограничивающего область контакта, равен нулю согласно графику 51. В этом случае $b=a$, и область контакта обращается в круг радиуса a . При $e=0$, как видно из формул (96) и (101),

$$K(e) = E(e) = \frac{\pi}{2}. \quad (124)$$

Согласно (124) формулы (119), (121) и (122) принимают вид:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \pi \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)P}{A}}, \quad (125)$$

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (126)$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \pi \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)P}{a}, \quad (127)$$

и мы приходим к решению осесимметричной контактной задачи теории упругости, полученному нами ранее в главе III.

Изложенное нами в этом параграфе решение контактной задачи принадлежит Герцу¹⁾. В этом решении существенную роль играет то предположение, что в разложении (80) при выборе направления координатных осей x и y , соответствующем условиям (81), ни один из коэффициентов $a_{11} + b_{11} = A$ и $a_{22} + b_{22} = B$ не обращается в нуль. Действительно, в противном случае для первоначального расстояния между точками упругих тел, соприкасающимися при сжатии, мы не имели бы права принять в качестве первого приближения выражение (82). Тот особый случай, когда один из коэффициентов A и B равен нулю либо оба эти коэффициента равны нулю, Герцем не рассматривался. Для случая радиальной симметрии мы указали полное решение задачи о сжатии упругих тел, первоначально касающихся в точке, регулярной для поверхностей обоих сжимаемых тел, не накладывая никаких дополнительных ограничений на конфигурацию этих поверхностей в окрестности точки первоначального касания. При отсутствии радиальной симметрии такое полное решение контактной задачи теории упругости связано с большими математическими трудностями. Однако, опираясь на свойство потенциала эллиптического диска, указанное нами в § 1 этой главы, можно дополнить решение Герца рядом других частных решений контактной задачи теории упругости.

Рассмотрим тот случай, когда разложение (80) начинается с однородного многочлена четвертой степени, принимающего при надлежащем выборе направления координатных осей x и y вид:

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 \quad (A \geq C).$$

Тогда, пренебрегая вследствие малости области контакта малыми высших порядков, будем в области Σ иметь:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 \quad (A \geq C), \quad (128)$$

и условие (77) примет вид:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \frac{a - Ax^4 - Bx^2y^2 - Cy^4}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (129)$$

Если в качестве области Σ принять снова часть плоскости xOy , ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

¹⁾ Hertz Н., Gesammelte Werke, т. 1, Leipzig, 1895, стр., 155.

то кратный интеграл, стоящий в левой части соотношения (129), будет представлять потенциал эллиптического диска $V(x, y, 0)$ с плотностью $p(x', y')$. Согласно формулам (4) и (46), если для давления $p(x', y')$ принять выражение

$$p(x', y') = a_1 \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} + a_2 \left(-1 \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right)^{3/2}, \quad (130)$$

этот кратный интеграл будет равен:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \pi ab \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} a_1 \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{8} a_2 \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right]^2 \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \\ &= \pi ab \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{8} a_2 - \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{4} a_2 \right) \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{8} a_2 \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^4}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \right] \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (131) \end{aligned}$$

Для того чтобы многочлен от x и y в правой части соотношения (131) был тождественно равен многочлену, фигурирующему в правой части условия (129), необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{4} a_2 = 0,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{2}{3} a_1. \quad (132)$$

Подставляя (132) в (130) и (131), найдём, что при

$$p(x', y') = a_1 \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \left[1 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right) \right], \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \frac{\pi}{4} ab a_1 \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^4}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \right] \times \\ &\times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{\pi}{4} ab a_1 \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{x^4 \sin^4 \varphi - 4x^3 y \sin^3 \varphi \cos \varphi - \right. \\ &- \left. \frac{6x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 4xy^3 \sin \varphi \cos^3 \varphi + y^4 \cos^4 \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \right] + \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (134) \end{aligned}$$

Находим, далее, путём замены φ на $\pi - \varphi$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} &= \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \psi \cos \psi d\psi}{(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi)^{5/2}} = 0, \end{aligned} \quad (135)$$

и аналогично:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} = 0. \quad (136)$$

Согласно (135) и (136) соотношение (134) принимает вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \\ &= \frac{\pi}{4} a b a_1 \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{x^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + y^4 \cos^4 \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \\ &= \frac{\pi a a_1}{4 b^4} \int_0^{\pi} \left[b^4 - \frac{x^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + y^4 \cos^4 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \quad (137)$$

где $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ — эксцентриситет эллипса. Так как в полученном определённом интеграле подынтегральная функция остаётся неизменной при замене φ на $\pi - \varphi$, можно соотношению (137) придать вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y')^2 dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \frac{\pi a a_1}{4 b^4} \int_0^{\pi/2} \left[b^4 - \frac{x^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + y^4 \cos^4 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (138)$$

Введём обозначение

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (139)$$

Находим:

$$\begin{aligned}
 & x^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + y^4 \cos^4 \varphi = \\
 & = x^4 \sin^4 \varphi + 6x^2 y^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + y^4 (1 - 2 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) = \\
 & = y^4 + (6x^2 y^2 - 2y^4) \sin^2 \varphi + (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \sin^4 \varphi = \\
 & = y^4 + \frac{6x^2 y^2 - 2y^4}{e^2} (1 - \Delta^2) + \frac{x^4 - 6x^2 y^2 + y^4}{e^4} (1 - 2\Delta^2 + \Delta^4) = \\
 & = \frac{1}{e^4} [e^4 y^4 + 6e^2 x^2 y^2 - 2e^2 y^4 + x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 - \\
 & \quad (6e^2 x^2 y^2 - 2e^2 y^4 + 2x^4 - 12x^2 y^2 + 2y^4) \Delta^2 + (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \Delta^4] = \\
 & = \frac{1}{e^4} \{ x^4 - 6(1 - e^2) x^2 y^2 + (1 - e^2)^2 y^4 - 2[x^4 - 3(2 - e^2) x^2 y^2 + \\
 & \quad + (1 - e^2) y^4] \Delta^2 + (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \Delta^4 \}. \quad (140)
 \end{aligned}$$

Подставляя (140) в (138), получим:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} &= \frac{\pi a a_1}{2b^4 e^4} \left\{ (b^4 e^4 - x^4 + 6x^2 y^2 - y^4) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \right. \\
 & + 2[x^4 - 3(2 - e^2) x^2 y^2 + (1 - e^2) y^4] \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi)} - \\
 & \left. - [x^4 - 6(1 - e^2) x^2 y^2 + (1 - e^2)^2 y^4] \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^5(\varphi)} \right\}. \quad (141)
 \end{aligned}$$

Согласно формулам (96) и (102)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = K(e), \quad \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi)} = \frac{E(e)}{1 - e^2}. \quad (142)$$

Чтобы преобразовать третий из интегралов, входящих в формулу (141), воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta^3} \right) &= \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi}{\Delta^3} + \frac{3e^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)}{\Delta^5} = \frac{e^2 - 2(1 - \Delta^2)}{e^2 \Delta^3} + \\
 + \frac{3(1 - \Delta^2)[e^2 - (1 - \Delta^2)]}{e^2 \Delta^5} &= \frac{2\Delta^2 - (2 - e^2)}{e^2 \Delta^3} + \frac{-3\Delta^4 + 3(2 - e^2)\Delta^2 - 3(1 - e^2)}{e^2 \Delta^5} = \\
 &= \frac{1}{e^2} \left(-\frac{1}{\Delta} + \frac{2(2 - e^2)}{\Delta^3} - \frac{3(1 - e^2)}{\Delta^5} \right). \quad (143)
 \end{aligned}$$

Интегрируя обе части тождества (143) по φ в пределах от нуля до $\frac{\pi}{2}$, найдём:

$$0 = - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + 2(2 - e^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi)} - 3(1 - e^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^5(\varphi)},$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^5(\varphi)} = \frac{1}{3(1-e^2)} \left[2(2-e^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi)} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \right] = \\ = \frac{2(2-e^2)E(e) - (1-e^2)K(e)}{3(1-e^2)^2} \quad (144)$$

согласно (142).

Подставляя (142) и (144) в (141), найдём:

$$\iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \frac{\pi a a_1}{6b^4 e^4 (1-e^2)^2} \{ 3(b^4 e^4 - x^4 + 6x^2 y^2 - y^4) \times \\ \times (1-e^2)^2 K(e) + 6[x^4 - 3(2-e^2)x^2 y^2 + (1-e^2)y^4](1-e^2)E(e) - \\ - [x^4 - 6(1-e^2)x^2 y^2 + (1-e^2)^2 y^4][2(2-e^2)E(e) - (1-e^2)K(e)] \} = \\ = \frac{\pi a a_1}{6b^4 e^4 (1-e^2)^2} \{ 3b^4 e^4 (1-e^2)^2 K(e) + [-3(1-e^2)^2 K(e) + \\ + 6(1-e^2)E(e) - 2(2-e^2)E(e) + (1-e^2)K(e)] x^4 + \\ + 6[3(1-e^2)^2 K(e) - 3(2-e^2)(1-e^2)E(e) + 2(2-e^2)(1-e^2)E(e) - \\ - (1-e^2)^2 K(e)] x^2 y^2 + [-3(1-e^2)^2 K(e) + 6(1-e^2)^2 E(e) - \\ - 2(2-e^2)(1-e^2)^2 E(e) + (1-e^2)^3 K(e)] y^4 \} = \frac{\pi a a_1}{6b^4 e^4 (1-e^2)^2} \times \\ \times \{ 3b^4 e^4 (1-e^2)^2 K(e) + [-(1-e^2)(2-3e^2)K(e) + 2(1-2e^2)E(e)] x^4 + \\ + 6(1-e^2)[2(1-e^2)K(e) - (2-e^2)E(e)] x^2 y^2 + \\ + (1-e^2)^2 [-(2+e^2)K(e) + 2(1+e^2)E(e)] y^4 \}. \quad (145)$$

Итак, если для давления $p(x', y')$ принять выражение (133), то кратный интеграл, стоящий в левой части условия (129), будет определяться формулой (145). Для того чтобы в этом случае выполнялось условие (129), достаточно, чтобы многочлены, стоящие в правых частях соотношений (129) и (145), были тождественно равны между собой. Сравнивая коэффициенты этих двух многочленов, получаем условия

$$\frac{\pi a a_1}{2} K(e) = \frac{\alpha}{\delta_1 + \delta_2}, \quad (146)$$

$$\frac{\pi a a_1}{6b^4 e^4 (1-e^2)^2} [(1-e^2)(2-3e^2)K(e) - 2(1-2e^2)E(e)] = \frac{A}{\delta_1 + \delta_2}, \quad (147)$$

$$\frac{\pi a a_1}{b^4 e^4 (1-e^2)} [-2(1-e^2)K(e) + (2-e^2)E(e)] = \frac{B}{\delta_1 + \delta_2}, \quad (148)$$

$$\frac{\pi a a_1}{6b^4 e^4} [(2+e^2)K(e) - 2(1+e^2)E(e)] = \frac{C}{\delta_1 + \delta_2}. \quad (149)$$

Подставляя (133) в (85), получим дополнительное условие

$$a_1 \iint_{\Sigma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \left[1 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right) \right] dx' dy' = P. \quad (150)$$

Переходя от прямоугольных координат $x'y'$ к полярным координатам r, φ , т. е. полагая

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi,$$

найдем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right)^{3/2} dx' dy' &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0(\varphi)} \left[1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) r^2 \right]^{3/2} r dr, \quad (151) \end{aligned}$$

где предел интегрирования $r_0(\varphi)$ определяется соотношением

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1. \quad (152)$$

Выполняя в (151) интегрирование по r и принимая во внимание соотношение (152), найдем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right)^{3/2} dx' dy' &= \\ &= -\frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) r^2 \right]^{5/2} \Big|_{r=0}^{r=r_0(\varphi)} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} = \\ &= \frac{a^2 b^2}{5} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{5} \pi ab \quad (153) \end{aligned}$$

согласно (60).

Подставляя (115) и (153) в (150), получим:

$$a_1 \left(\frac{2}{3} \pi ab - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \pi ab \right) = P,$$

откуда

$$a_1 = \frac{5P}{2\pi ab}. \quad (154)$$

Итак, чтобы получить решение рассматриваемой контактной задачи, мы должны удовлетворить пяти условиям — (146), (147), (148), (149) и (154). В то же время в нашем распоряжении лишь четыре постоянных, выбором которых мы можем распоряжаться, — полуоси эллипса a и b , сближение α и коэффициент a_1 в формуле (133) для давления p . Таким образом, перечисленные выше условия накладывают ограничение на

заданные постоянные, фигурирующие в постановке рассматриваемой контактной задачи. Остановимся сначала на характере этого ограничения. Из условий (147), (148) и (149) находим:

$$\frac{[(2 - e^2)K(e) - 2(1 + e^2)E(e)](1 - e^2)^2}{(1 - e^2)(2 - 3e^2)K(e) - 2(1 - 2e^2)E(e)} = \frac{C}{A}, \quad (155)$$

$$\frac{6[-2(1 - e^2)K(e) + (2 - e^2)E(e)](1 - e^2)}{(1 - e^2)(2 - 3e^2)K(e) - 2(1 - 2e^2)E(e)} = \frac{B}{A}. \quad (156)$$

Выражения, стоящие в левых частях соотношений (155) и (156), зависят лишь от эксцентриситета e . Таким образом, исключив из соотношений (155) и (156) эксцентриситет e , получим связь между отношениями $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$. Чтобы показать характер этой связи, введём обозначение

$$\frac{C}{A} = k^2. \quad (157)$$

Так как соотношения (155) и (156) выражают отношение $\frac{B}{A}$ как функцию отношения $\frac{C}{A}$, отношение $\frac{B}{A}$ должно быть некоторой определённой функцией введённого нами параметра k . Представим эту функциональную зависимость в форме

$$\frac{B}{A} = 2k[1 - \delta(k)]. \quad (158)$$

В приводимой ниже таблице дан ряд значений функции $\delta(k)$:

k	1	0,8303	0,6532	0,4633	0,296
$\delta(k)$	0	0,0014	0,0045	0,0142	0,0451

Как видим, функция $\delta(k)$ в широком диапазоне изменения аргумента k приобретает значения, малые по сравнению с единицей. Подставляя значения постоянных B и C из (157) и (158) в (128), найдём:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = A \{x^4 + 2k[1 - \delta(k)]x^2y^2 + k^2y^4\}. \quad (159)$$

Итак, для того чтобы мы могли прийти к решению рассматриваемой контактной задачи, первоначальное расстояние между точками, соприкасающимися при сжатии, $f_1(x, y) + f_2(x, y)$, должно иметь выражение (159), где A и k — постоянные, подчинённые условиям

$$0 < k \leq 1, \quad A > 0, \quad (160)$$

а в остальном произвольные.

Так как величина $\delta(k)$ мала по сравнению с единицей, формулу (159) можно заменить приближённой:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = A(x^2 + ky^3)^2. \quad (161)$$

На рис. 52 показаны кривые, определяемые уравнениями

$$(x^2 + ky^3)^2 = c^4, \quad x^4 + 2k[1 - \delta(k)]x^2y^2 + k^2y^4 = c^4$$

при $k=0,079$ (в этом случае $\delta(k)=0,124$, а эксцентриситет e , определяемый уравнением (155), равен: $e=0,975$). Первое из

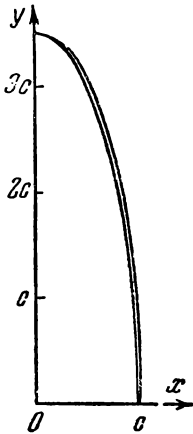


Рис. 52.

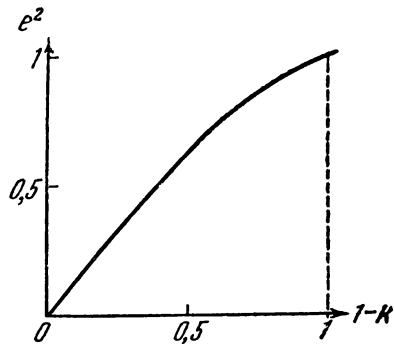


Рис. 53.

этих уравнений определяет внутреннюю, второе — внешнюю кривую на рис. 52. Как видим, даже при значениях k , близких к нулю, и, соответственно, при эксцентриситете e , близком к единице, получаем вполне удовлетворительное приближение, переходя от зависимости (159) к приближённой зависимости (161).

Итак, в то время как Герцем было указано решение контактной задачи для случая

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = A(x^2 + ky^2),$$

мы фактически пришли к решению контактной задачи для случая

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = A(x^2 + ky^3)^2.$$

Подставляя (157) в (155), получим уравнение

$$\frac{[(2 + e^2)K(e) - 2(1 + e^2)E(e)](1 - e^2)^2}{(1 - e^2)(2 - 3e^2)K(e) - 2(1 - 2e^2)E(e)} = k^3, \quad (162)$$

определяющее эксцентриситет e эллипса, ограничивающего область контакта, в функции от заданного коэффициента k . На рис. 53 дан график зависимости между эксцентриситетом e и коэффициентом k .

Подставляя (154) в (147), получим соотношение

$$\frac{5P}{12b^5e^4(1-e^2)^2} [(1-e^2)(2-3e^2)K(e) - 2(1-2e^2)E(e)] = \frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2},$$

из которого следует:

$$b = \sqrt[5]{\frac{5[(1-e^2)(2-3e^2)K(e) - 2(1-2e^2)E(e)](\vartheta_1 + \vartheta_2)P}{12e^4(1-e^2)^2 A}}. \quad (163)$$

Итак, определив из уравнения (162) эксцентриситет e , мы по формуле (163) найдём большую, а по формуле

$$a = b \sqrt{1-e^2} \quad (164)$$

малую полуось эллипса, ограничивающего область контакта. Подставляя (154) в (133), получим окончательное выражение для давления $p(x, y)$ в области контакта:

$$p(x, y) = \frac{5P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \left[1 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]. \quad (165)$$

Подставляя (154) в (146), найдём сближение упругих тел при сжатии α :

$$\alpha = \frac{5K(e)}{4b} (\vartheta_1 + \vartheta_2) P. \quad (166)$$

Формулы (162), (163), (164), (165) и (166) полностью решают рассматриваемую нами контактную задачу, последовательно определяя конфигурацию области контакта, давление в области контакта и сближение сжимаемых тел при сжатии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРИВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ
К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Рассмотрим сначала определённые интегралы

$$c_n = \int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n=0, 1, \dots \quad (1)$$

Полагая в (1) $t=1-x^2$, будем иметь:

$$c_n = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}},$$

или:

$$c_n = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{(1-x^2) \left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}. \quad (2)$$

Вводя обозначения

$$X_n = \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2) \left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}, \quad n=0, 1, \dots, \quad (3)$$

найдем:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2} (X_0 - X_1), \\ c_1 &= \sqrt{2} (X_0 - 2X_1 + X_2), \\ c_2 &= \sqrt{2} (X_0 - 3X_1 + 3X_2 - X_3), \text{ и т. д. } \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, вычисление определённых интегралов c_n сводится к вычислению определённых интегралов X_n . Пользуясь общепринятыми обозначениями

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \quad (5)$$

для полных эллиптических интегралов первого и второго родов, найдём:

$$X_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} = K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} = \\ &= 2 \left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} - \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}x^2}{1-x^2}} dx \right] = \\ &= 2 \left[K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся, далее, тождеством

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{2n-3} \sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)} \right] &= \\ &= \frac{2(2n-3)x^{2n-4} - 3(2n-2)x^{2n-2} + (2n-1)x^{2n}}{2\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя обе части тождества (8) по x в пределах от нуля до единицы, найдём в соответствии с обозначением (3):

$$0 = \frac{1}{2} [2(2n-3)X_{n-2} - 3(2n-2)X_{n-1} + (2n-1)X_n],$$

откуда

$$X_n = 3 \frac{2n-2}{2n-1} X_{n-1} - 2 \frac{2n-3}{2n-1} X_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Формула (9) даёт возможность выразить всякий интеграл X_n через интегралы X_0 и X_1 , которые в свою очередь выражаются согласно формулам (6) и (7) через полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

В частности, из формулы (9) следует:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{2}{3} (3X_1 - X_0), \\ X_3 &= \frac{6}{5} (2X_2 - X_1) = \frac{2}{5} (9X_1 - 4X_0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4), найдём:

$$c_0 = \sqrt{2}(X_0 - X_1), \quad c_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} X_0, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}(X_0 - X_1). \quad (11)$$

Подставляя (6) и (7) в (11), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2} \left[2E \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right], \\ c_1 &= \frac{\sqrt{2}}{3} K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ c_2 &= \frac{3\sqrt{2}}{5} \left[2E \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из таблиц полных эллиптических интегралов находим (см., например, Я. Шпильрейн, Таблицы специальных функций, часть II):

$$K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1,85407, \quad E \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1,35064. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$c_0 = 1,19814, \quad c_1 = 0,87403, \quad c_2 = 0,71888. \quad (14)$$

С вычислением интегралов c_0 и c_2 мы столкнулись в главе III (там для интегралов c_0 и c_2 мы пользовались обозначениями J_1 и J_2)¹⁾.

2. Рассмотрим, далее, определённый интеграл

$$J(\xi) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{3}{2}} dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2-\xi^2)}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (15)$$

Полагая в (15) $t = 1 - x^2$, получим:

$$J(\xi) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 - \xi^2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)}}. \quad (16)$$

Находим, далее:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 - \xi^2} &= 1 + \frac{\xi^2}{(1-x^2)^2 - \xi^2} = 1 + \frac{\xi}{2(1-x^2-\xi)} - \frac{\xi}{2(1-x^2+\xi)} = \\ &= 1 + \frac{\xi}{2(1-\xi)} \left(1 + \frac{x^2}{1-x^2-\xi} \right) - \frac{\xi}{2(1+\xi)} \left(1 + \frac{x^2}{1-x^2+\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{\xi}{2(1-\xi)} \frac{x^2}{1-x^2-\xi} - \frac{\xi}{2(1+\xi)} \frac{x^2}{1-x^2+\xi}. \end{aligned} \quad (17)$$

¹⁾ См. формулы (150) главы III.

Подставляя (17) в (16), получим:

$$\begin{aligned}
 J(\xi) = & \frac{\sqrt{2}}{2(1-\xi^2)} \left[2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} + \right. \\
 & + \xi \frac{1+\xi}{1-\xi} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1-\frac{x^2}{1-\xi}\right) \sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} - \\
 & \left. - \xi \frac{1-\xi}{1+\xi} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1-\frac{x^2}{1+\xi}\right) \sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\Pi(y, k) = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1-k^2x^2y^2) \sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} \quad (19)$$

и пользуясь обозначением (5), сможем придать формуле (18) вид:

$$\begin{aligned}
 J(\xi) = & \frac{\sqrt{2}}{2(1-\xi^2)} \left[2K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \xi \frac{1+\xi}{1-\xi} \pi\left(\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - \xi \frac{1-\xi}{1+\xi} \pi\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Эллиптический интеграл $\Pi(y, k)$ выражается через эллиптические интегралы первого и второго родов. Это преобразование основывается на формулах сложения эллиптических интегралов, которые мы ниже выводим.

3. Чтобы получить формулы сложения эллиптических интегралов, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}, \quad (21)$$

где

$$\Delta(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (22)$$

с начальным условием

$$y = z \quad \text{при } x = 0 \quad (|z| \leq 1). \quad (23)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (21), получим:

$$\frac{dx}{\Delta(x)} = -\frac{dy}{\Delta(y)},$$

откуда, в соответствии с начальным условием (23),

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = - \int_z^y \frac{dy}{\Delta(y)},$$

или

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^z \frac{dy}{\Delta(y)} - \int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)}. \quad (24)$$

Пользуясь для эллиптического интеграла первого рода обозначением

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(x, k), \quad (25)$$

сможем придать соотношению (24) вид:

$$F(x, k) + F(y, k) = F(z, k). \quad (26)$$

Итак, мы получили решение дифференциального уравнения (21) в эллиптических интегралах. В то же время, как мы сейчас покажем, можно получить для этого дифференциального уравнения и алгебраический интеграл.

Если y как функция x удовлетворяет дифференциальному уравнению (21), то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1 - k^2x^2y^2) &= -2k^2xy \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = -2k^2xy \left[y - x \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} \right], \\ \frac{d}{dx}[y\Delta(x) + x\Delta(y)] &= y\Delta'(x) + \Delta(y) + [\Delta(x) + x\Delta'(y)] \frac{dy}{dx} = \\ &= y\Delta'(x) + \Delta(y) - [\Delta(x) + x\Delta'(y)] \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = y\Delta'(x) - x\Delta'(y) \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d[y\Delta(x) + x\Delta(y)]}{d(1 - k^2x^2y^2)} = \frac{y\Delta(x)\Delta'(x) - x\Delta(y)\Delta'(y)}{2k^2xy[x\Delta(y) - y\Delta(x)]}. \quad (27)$$

Согласно (22)

$$\Delta^2(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2) = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4,$$

откуда

$$\Delta(x)\Delta'(x) = -(1 + k^2)x + 2k^2x^3.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y\Delta(x)\Delta'(x) - x\Delta(y)\Delta'(y) &= y[2k^2x^3 - (1 + k^2)x] - \\ &- x[2k^2y^3 - (1 + k^2)y] = 2k^2xy(x^2 - y^2). \quad (28) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [x\Delta(y) - y\Delta(x)][x\Delta(y) + y\Delta(x)] &= x^2\Delta^2(y) - y^2\Delta^2(x) = \\ &= x^2[1 - (1 + k^2)y^2 + k^2y^4] - y^2[1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4] = \\ &= x^2 + k^2x^2y^4 - y^2 - k^2x^4y^2 = (x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2), \end{aligned}$$

откуда

$$x\Delta(y) - y\Delta(x) = \frac{(x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2)}{x\Delta(y) + y\Delta(x)}. \quad (29)$$

Подставляя (28) и (29) в (27), найдём:

$$\frac{d[y\Delta(x) + x\Delta(y)]}{d(1 - k^2x^2y^2)} = \frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2x^2y^2}. \quad (30)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[y\Delta(x) + x\Delta(y)]}{y\Delta(x) + x\Delta(y)} &= \frac{d(1 - k^2x^2y^2)}{1 - k^2x^2y^2}, \\ \ln[y\Delta(x) + x\Delta(y)] &= \ln(1 - k^2x^2y^2) + \ln c, \\ \frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2x^2y^2} &= c, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где c — произвольная постоянная.

Определим теперь произвольную постоянную c в соответствии с начальным условием (23). Полагая в (31) $x = 0$, $y = z$, найдём:

$$c = z. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), получим:

$$\frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2x^2y^2} = z. \quad (33)$$

Итак, интегрируя дифференциальное уравнение (21) при начальном условии (23), мы получили решение в двух видах — в виде соотношения (26) и в виде соотношения (33). Таким образом, если числа x , y и z удовлетворяют соотношению (33), между эллиптическими интегралами первого рода с верхними пределами x , y и z будет иметь место связь (26). Мы пришли к формуле сложения для эллиптических интегралов первого рода. Непосредственно из соотношения (26) видно, что эта формула справедлива лишь в том случае, если x и y удовлетворяют неравенству

$$|F(x, k) + F(y, k)| \leq F(1, k) = K(k). \quad (34)$$

Выведем теперь формулу сложения эллиптических интегралов первого рода для того случая, когда

$$K(k) \leq F(x, k) + F(y, k) \leq 2K(k). \quad (35)$$

Для этого заменим начальное условие (23) начальным условием

$$y = 1 \quad \text{при } x = z' \quad (0 \leq z' \leq 1). \quad (36)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (21) при начальном условии (36), найдём:

$$\int_{z'}^x \frac{dx}{\Delta(x)} = - \int_1^y \frac{dy}{\Delta(y)},$$

или:

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} - \int_0^{z'} \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^1 \frac{dy}{\Delta(y)} - \int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)},$$

т. е.:

$$F(x, k) + F(y, k) = K(k) + F(z', k). \quad (37)$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение (21) имеет решение (33), где z — произвольная постоянная. Определим постоянную z в соответствии с начальным условием (36). Полагая в (33) $x = z'$, $y = 1$, найдём:

$$\frac{\Delta(z')}{1 - k^2 z'^2} = z. \quad (38)$$

Итак, при условии (35) вместо формулы сложения (26) мы будем иметь формулу сложения (37), где z' связано с z соотношением (38). Преобразуем формулу (37). Из соотношения (38) находим:

$$z^2 = \frac{1 - z'^2}{1 - k^2 z'^2}, \quad 1 - z^2 = \frac{(1 - k^2) z'^2}{1 - k^2 z'^2}, \quad 1 - k^2 z^2 = \frac{1 - k^2}{1 - k^2 z'^2},$$

$$\Delta(z) = \frac{(1 - k^2) z'}{1 - k^2 z'^2}, \quad -2k^2 z dz = \frac{2k^2(1 - k^2) z' dz'}{(1 - k^2 z'^2)^2}, \quad dz = - \frac{(1 - k^2) z' dz'}{(1 - k^2 z'^2) \Delta(z')},$$

откуда

$$\frac{dz}{\Delta(z)} = - \frac{dz'}{\Delta(z')}. \quad (39)$$

Из (38) следует:

$$z = 1 \quad \text{при } z' = 0. \quad (40)$$

Интегрируя (39) и принимая во внимание (40), найдём:

$$\int_1^z \frac{dz}{\Delta(z)} = - \int_0^{z'} \frac{dz'}{\Delta(z')},$$

откуда

$$F(z', k) = \int_0^{z'} \frac{dz'}{\Delta(z')} = \int_z^1 \frac{dz}{\Delta(z)} = \int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)} - \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)} = K(k) - F(z, k). \quad (41)$$

Подставляя (41) в (37), получим формулу сложения

$$F(x, k) + F(y, k) = 2K(k) - F(z, k). \quad (42)$$

Выведем теперь формулы сложения для эллиптических интегралов второго рода.

Пользуясь тождеством (29), можем придать соотношению (33) вид:

$$\frac{x^2 - y^2}{x\Delta(y) - y\Delta(x)} = z,$$

или

$$\frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} - \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = k^2z \left[y - x \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} \right]. \quad (43)$$

Но если y как функция x удовлетворяет соотношению (33); то y удовлетворяет и дифференциальному уравнению (21). Пользуясь соотношением (21), можем придать равенству (43) вид:

$$\frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} dx + \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} dy = k^2z (y dx + x dy). \quad (44)$$

Принимая начальные условия (23), найдём из (44):

$$\int_0^x \frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} dx + \int_z^y \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} dy = k^2zxy,$$

или

$$\int_0^x \frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} dx + \int_0^y \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} dy - \int_0^z \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} dy = k^2zxy. \quad (45)$$

Пользуясь для эллиптического интеграла второго рода обозначением

$$\int_0^x \frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} dx = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}} dx = E(x, k), \quad (46)$$

сможем придать соотношению (45) вид:

$$E(x, k) + E(y, k) = E(z, k) + k^2xyz. \quad (47)$$

Итак, если x , y и z удовлетворяют соотношению (33) и неравенству (34), для эллиптических интегралов второго рода имеет место формула сложения (47). Если x и y удовлетворяют неравенству (35), то, пользуясь начальными условиями (36), найдём из (44):

$$\int_{z'}^x \frac{1 - k^2x^2}{\Delta(x)} dx + \int_1^y \frac{1 - k^2y^2}{\Delta(y)} dy = k^2z(xy - z'),$$

или:

$$\int_0^x \frac{1-k^2x^2}{\Delta(x)} dx - \int_0^{z'} \frac{1-k^2x^2}{\Delta(x)} dx + \int_0^y \frac{1-k^2y^2}{\Delta(y)} dy - \\ - \int_0^1 \frac{1-k^2y^2}{\Delta(y)} dy = k^2z(xy-z').$$

Пользуясь обозначениями (46) и (5), сможем придать этому соотношению вид:

$$E(x, k) + E(y, k) = E(k) + E(z', k) + k^2z(xy-z'). \quad (48)$$

Из соотношений (38) и (39) следует:

$$\frac{1-k^2z'^2}{\Delta(z')} dz' = - \frac{1-k^2}{1-k^2z^2} \frac{dz}{\Delta(z)}. \quad (49)$$

Интегрируя (49) и принимая во внимание (40), получим:

$$E(z', k) = -(1-k^2) \int_1^z \frac{dz}{(1-k^2z^2)\Delta(z)} = (1-k^2) \int_z^1 \frac{dz}{(1-k^2z^2)\Delta(z)}. \quad (50)$$

Находим, далее:

$$k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{z \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} \right) = \frac{k^2 \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} - \frac{k^2z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{k^4z^2 \sqrt{1-z^2}}{(1-k^2z^2)^{3/2}} = \\ = \frac{k^2(1-z^2)(1-k^2z^2) - k^2z^2(1-k^2z^2) + k^4z^2(1-z^2)}{(1-k^2z^2)\Delta(z)} = \\ = \frac{k^2 - 2k^2z^2 + k^4z^4}{(1-k^2z^2)\Delta(z)} = \frac{1-k^2z^2}{\Delta(z)} - \frac{1-k^2}{(1-k^2z^2)\Delta(z)}. \quad (51)$$

Пользуясь тождеством (51), найдём согласно (50):

$$E(z', k) = \int_z^1 \left[\frac{1-k^2z^2}{\Delta(z)} - k^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{z \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} \right) \right] dz = \\ = \int_0^1 \frac{1-k^2z^2}{\Delta(z)} dz - \int_0^z \frac{1-k^2z^2}{\Delta(z)} dz + \frac{k^2z \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} = \\ = E(k) - E(z, k) + \frac{k^2z \sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}}. \quad (52)$$

Далее, согласно (38)

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} = \sqrt{\frac{(1-k^2)z'^2}{1-k^2z'^4}} : \sqrt{\frac{1-k^2}{1-k^2z'^2}} = z'. \quad (53)$$

Подставляя (53) в (52), найдём:

$$E(z', k) = E(k) - E(z, k) + k^2 z z'. \quad (54)$$

Подставляя (54) в (48), получим формулу сложения

$$E(x, k) + E(y, k) = 2E(k) - E(z, k) + k^2 x y z. \quad (55)$$

Объединяя формулы сложения (26), (42), (47) и (55), будем окончательно иметь:

$$\left. \begin{aligned} F(x, k) + F(y, k) &= F(z, k), \\ E(x, k) + E(y, k) &= E(z, k) + k^2 x y z \\ &\text{при } |F(x, k) + F(y, k)| \leq K(k), \\ F(x, k) + F(y, k) &= 2K(k) - F(z, k), \\ E(x, k) + E(y, k) &= 2E(k) - E(z, k) + k^2 x y z \\ &\text{при } K(k) \leq F(x, k) + F(y, k) \leq 2K(k), \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где

$$z = \frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2 x^2 y^2}.$$

4. Перейдём к преобразованию эллиптического интеграла

$$\Pi(y, k) = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - k^2 x^2 y^2) \sqrt{(1 - x^2) \left(1 - \frac{1}{2} x^2\right)}}. \quad (57)$$

Будем сначала предполагать, что $0 < y < 1$. Так как в этом случае при $0 < x < 1$

$$|F(x, k) + F(-y, k)| < K(k),$$

будем иметь, согласно формулам сложения (56):

$$\left. \begin{aligned} F(x, k) + F(-y, k) &= F(\zeta, k), \\ E(x, k) + E(-y, k) &= E(\zeta, k) - k^2 x y \zeta, \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где

$$\zeta = \frac{-y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2 x^2 y^2}. \quad (59)$$

Но

$$F(-y, k) = \int_0^{-y} \frac{dy}{\Delta(y)} = - \int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)} = -F(y, k), \quad (60)$$

и, аналогично,

$$E(-y, k) = -E(y, k). \quad (61)$$

Таким образом, формулам (58) можно придать вид:

$$\left. \begin{aligned} F(x, k) - F(y, k) &= F(\zeta, k), \\ E(x, k) - E(y, k) &= E(\zeta, k) - k^2 x y \zeta, \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Обозначим, далее, через y' число, для которого

$$F(y', k) + F(y, k) = K(k). \tag{63}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 < F(x, k) + F(y, k) < K & \text{ при } 0 < x < y', \\ K < F(x, k) + F(y, k) < 2K & \text{ при } y' < x < 1, \end{aligned}$$

и согласно формулам сложения (56) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} F(x, k) + F(y, k) &= F(z, k), \\ E(x, k) + E(y, k) &= E(z, k) + k^2xyz, \end{aligned} \right\} \tag{64}$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) + F(y, k) &= 2K(k) - F(z, k), \\ E(x, k) + E(y, k) - 2E(k) - E(z, k) &+ k^2xyz, \end{aligned} \right\} \tag{65}$$

Из формул (62), (64) и (65) выводим:

$$\left. \begin{aligned} E(z, k) - E(\zeta, k) &= 2E(y, k) - k^2xy(z + \zeta) & \text{при } 0 < x < y', \\ E(z, k) + E(\zeta, k) &= 2E(k) - 2E(y, k) + k^2xy(z + \zeta) & \text{при } y' < x < 1. \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

Далее, согласно (56) и (59)

$$z + \zeta = \frac{2x \cdot y}{1 - k^2x^2y^2}. \tag{67}$$

Подставляя (67) в (66), найдём:

$$\left. \begin{aligned} k^2y^2(y) \frac{x^2}{1 - k^2x^2y^2} &= \frac{1}{2} E(\zeta, k) - \frac{1}{2} E(z, k) + E(y, k) & \text{при } 0 < x < y', \\ k^2y^2(y) \frac{x^2}{1 - k^2x^2y^2} &= \frac{1}{2} E(\zeta, k) + \frac{1}{2} E(z, k) + E(y, k) - E(k) & \text{при } y' < x < 1. \end{aligned} \right\} \tag{68}$$

Умножая обе части равенств (68) на $\frac{dx}{\Delta(x)}$ и интегрируя по x , найдём (учитывая, что z и ζ зависят от x):

$$\left. \begin{aligned} k^2y^2(y) \int_0^{y'} \frac{x^2 dx}{(1 - k^2x^2y^2) \Delta(x)} &= \frac{1}{2} \int_0^{y'} \frac{E(\zeta, k) dx}{\Delta(x)} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{y'} \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} + E(y, k) \int_0^{y'} \frac{dx}{\Delta(x)}, \\ k^2y^2 \int_{y'}^1 \frac{x^2 dx}{(1 - k^2x^2y^2) \Delta(x)} &= \frac{1}{2} \int_{y'}^1 \frac{E(\zeta, k) dx}{\Delta(x)} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{y'}^1 \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} + [E(y, k) - E(k)] \int_{y'}^1 \frac{dx}{\Delta(x)}, \end{aligned} \right\} \tag{69}$$

откуда

$$k^2 y \Delta(y) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1-k^2 x^2 y^2) \Delta(x)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{E(\zeta, k) dx}{\Delta(x)} - \frac{1}{2} \int_0^{y'} \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} + \\ + \frac{1}{2} \int_{y'}^1 \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} + E(y, k) \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x)} - E(k) \int_{y'}^1 \frac{dx}{\Delta(x)}. \quad (70)$$

Дифференцируя по x обе части первого из соотношений (62), найдём:

$$\frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{\Delta(\zeta)} \frac{d\zeta}{dx}, \quad 0 < x < 1,$$

откуда

$$\frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)}, \quad 0 < x < 1. \quad (71)$$

Дифференцируя по x обе части первого из соотношений (64) и первого из соотношений (65), найдём:

$$\frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{\Delta(z)} \frac{dz}{dx}, \quad 0 < x < y', \quad \frac{1}{\Delta(x)} = -\frac{1}{\Delta(z)} \frac{dz}{dx}, \quad y' < x < 1,$$

откуда

$$\frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{dz}{\Delta(z)}, \quad 0 < x < y', \quad \frac{dx}{\Delta(x)} = -\frac{dz}{\Delta(z)}, \quad y' < x < 1. \quad (72)$$

Далее, из (59) и (56) находим:

$$\left. \begin{aligned} \zeta = -y & \quad \text{при } x=0, & \zeta = \frac{\Delta(y)}{1-k^2 y^2} & \quad \text{при } x=1, \\ z = y & \quad \text{при } x=0, & z = \frac{y\Delta(y') + y'\Delta(y)}{1-k^2 y^2 y'^2} & \quad \text{при } x=y', \\ z = \frac{\Delta(y)}{1-k^2 y^2} & \quad \text{при } x=1. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Вводя обозначения $\frac{\Delta(y)}{1-k^2 y^2} = y_1$, $\frac{y\Delta(y') + y'\Delta(y)}{1-k^2 y^2 y'^2} = y_2$, найдём в

соответствии с формулами (71), (72) и (73):

$$\int_0^1 \frac{E(\zeta, k) dx}{\Delta(x)} - \int_0^{y'} \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} + \int_{y'}^1 \frac{E(z, k) dx}{\Delta(x)} = \\ = \int_{-y}^{y_1} \frac{E(\zeta, k) d\zeta}{\Delta(\zeta)} - \int_y^{y_2} \frac{E(z, k) dz}{\Delta(z)} - \int_{y_2}^{y_1} \frac{E(z, k) dz}{\Delta(z)} = \\ = \int_{-y}^{y_1} \frac{E(\zeta, k) d\zeta}{\Delta(\zeta)} - \int_y^{y_1} \frac{E(z, k) dz}{\Delta(z)} = \int_{-y}^y \frac{E(\zeta, k) d\zeta}{\Delta(\zeta)} = 0, \quad (74)$$

так как функция $\frac{E(\zeta, k)}{\Delta(\zeta)}$ согласно (61) нечётная. Далее, согласно (63)

$$\int_{y'}^1 \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x)} - \int_0^{y'} \frac{dx}{\Delta(x)} = K(k) - F(y', k) = F(y, k). \quad (75)$$

Подставляя (74) и (85) в (70), найдём:

$$k^2 y \Delta(y) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - k^2 x^2 y^2) \Delta(x)} = K(k) E(y, k) - E(k) F(y, k). \quad (76)$$

Итак, при $0 < y < 1$ мы пришли к соотношению

$$\begin{aligned} \Pi(y, k) &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - k^2 x^2 y^2) \Delta(x)} = \\ &= \frac{K(k) \int_0^y \sqrt{\frac{1 - k^2 y^2}{1 - y^2}} dy - E(k) \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}}{k^2 y \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}. \end{aligned} \quad (77)$$

Совершенно аналогично, пользуясь формулами сложения эллиптических интегралов, соответствующими случаю $y > 1$, можно получить соотношения

$$\Pi(y, k) = \frac{-K(k) \int_1^y \sqrt{\frac{1 - k^2 y^2}{y^3 - 1}} dy + E(k) \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1)(1 - k^2 y^2)}}}{k^2 y \sqrt{(y^2 - 1)(1 - k^2 y^2)}}, \quad (78)$$

$$1 < y < \frac{1}{k},$$

$$\Pi(y, k) = \frac{-K(k) \int_{1/k}^y \sqrt{\frac{k^2 y^2 - 1}{y^2 - 1}} dy - E(k) \int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1)(k^2 y^2 - 1)}}}{k^2 y \sqrt{(y^2 - 1)(k^2 y^2 - 1)}}, \quad (79)$$

$$y > 1/k.$$

Мы ограничимся формальным выводом формул (78) и (79) из формулы (77).

Полагая в правой части формулы (77)

$$\sqrt{1 - y^2} = i \sqrt{y^2 - 1},$$

получим:

$$\Pi(y, k) = \frac{-K(k) \int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} dy + E(k) \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}}{k^2y \sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}. \quad (80)$$

При $1 < y < \frac{1}{k}$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} dy &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} dy + \int_1^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} dy = \\ &= \int_1^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} + \text{мнимая часть}, \end{aligned} \quad (81)$$

и аналогично:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}} = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}} + \text{мнимая часть}. \quad (82)$$

Подставляя (81) и (82) в (80), найдём:

$$\begin{aligned} \Pi(y, k) &= \frac{-K(k) \int_1^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{y^2-1}} dx + E(k) \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y-1)(1-k^2y^2)}}}{k^2y \sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}} + \\ &+ \text{мнимая часть}. \end{aligned} \quad (83)$$

Но левая часть в соотношении (83) вещественная. Следовательно, мнимая часть выражения, стоящего в правой части соотношения (83), должна быть равна нулю, и мы приходим к формуле (78). Полагая в правой части формулы (78)

$$\sqrt{1-k^2y^2} = i \sqrt{k^2y^2-1},$$

получим:

$$\Pi(y, k) = \frac{-K(k) \int_1^y \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy - E(k) \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}}}{k^2y \sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}}. \quad (84)$$

При $y > \frac{1}{k}$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^y \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy &= \int_1^{1/k} \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy + \int_{1/k}^y \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy = \\ &= \int_{1/k}^y \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy + \text{мнимая часть}, \end{aligned} \quad (85)$$

и аналогично:

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}} = \int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}} + \text{мнимая часть.} \quad (86)$$

Подставляя (85) и (86) в (84), найдём:

$$\begin{aligned} \Pi(y, k) = & \frac{-K(k) \int_{1/k}^y \sqrt{\frac{k^2y^2-1}{y^2-1}} dy - E(k) \int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}}}{k^2y \sqrt{(y^2-1)(k^2y^2-1)}} + \\ & + \text{мнимая часть.} \quad (87) \end{aligned}$$

Но левая часть в соотношении (87) вещественная. Следовательно, мнимая часть выражения, стоящего в правой части соотношения (87), должна быть равна нулю, и мы приходим к формуле (79).

Итак, эллиптический интеграл $\Pi(y, k)$ выражается через эллиптические интегралы первого и второго родов.

5. Выше мы получили для эллиптического интеграла

$$J(\xi) = \int_0^1 \frac{t^{3/2} dt}{\sqrt{1-t^2(t^2-\xi^2)}}, \quad 0 < \xi < 1,$$

выражение (см. формулу (80))

$$\begin{aligned} J(\xi) = & \frac{\sqrt{2}}{2(1-\xi^2)} \left[2K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \xi \frac{1+\xi}{1-\xi} \Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \xi \frac{1-\xi}{1+\xi} \Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]. \quad (88) \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение, пользуясь полученными выше формулами для эллиптического интеграла $\Pi(y, k)$. Так как при $0 < \xi < 1$

$$\sqrt{\frac{2}{1-\xi}} > \sqrt{2}, \quad 1 < \sqrt{\frac{2}{1+\xi}} < \sqrt{2},$$

в эллиптическом интеграле $\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $y > \frac{1}{k}$, а в интеграле $\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $1 < y < \frac{1}{k}$. Таким образом, для

преобразования первого из этих интегралов мы должны воспользоваться формулой (79), а для второго — формулой (78). Пола-

гая в формуле (79) $y = \sqrt{\frac{2}{1-\xi}}$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а в формуле (78)

$y = \sqrt{\frac{2}{1+\xi}}$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, найдём:

$$\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}y^2-1}{y^2-1}} dy}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1-\xi} \left(\frac{2}{1-\xi}-1\right) \left(\frac{1}{1-\xi}-1\right)}} - \frac{E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1) \left(\frac{1}{2}y^2-1\right)}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1-\xi} \left(\frac{2}{1-\xi}-1\right) \left(\frac{1}{1-\xi}-1\right)}}, \quad (89)$$

$$\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_1^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}y^2}{y^2-1}} dy}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+\xi} \left(\frac{2}{1+\xi}-1\right) \left(1-\frac{1}{1+\xi}\right)}} + \frac{E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_1^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1) \left(1-\frac{1}{2}y^2\right)}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+\xi} \left(\frac{2}{1+\xi}-1\right) \left(1-\frac{1}{1+\xi}\right)}}. \quad (90)$$

Полагая $y = \frac{\sqrt{2}}{\eta}$, найдём:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}y^2-1}{y^2-1}} dy = \int_{\sqrt{1-\xi}}^1 \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\frac{1}{2}\eta^2}} \frac{d\eta}{\eta^2}, \quad (91)$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1) \left(\frac{1}{2}y^2-1\right)}} = \int_{\sqrt{1-\xi}}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}}. \quad (92)$$

Пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\eta} \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2} \right) &= -\frac{1}{\eta^2} \sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)} - \\ &- \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\frac{1}{2}\eta^2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} - \\ &- \frac{1}{\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\frac{1}{2}\eta^2}} \left(1-\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{2}\eta^2\right) = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} - \frac{1}{\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\frac{1}{2}\eta^2}}, \end{aligned}$$

найдем:

$$\begin{aligned} &\int_{\sqrt{1-\xi}}^1 \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\frac{1}{2}\eta^2}} \frac{d\eta}{\eta^2} = \\ &= \int_{\sqrt{1-\xi}}^1 \left\{ -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} - \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}}{\eta} \right] \right\} d\eta = \\ &= -\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} d\eta + \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} d\eta + \\ &\quad + \sqrt{\frac{[1-(1-\xi)] \left[1-\frac{1}{2}(1-\xi)\right]}{1-\xi}} = \\ &= -E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{\frac{\xi(1+\xi)}{2(1-\xi)}}. \end{aligned} \quad (93)$$

Далее:

$$\begin{aligned} &\int_{\sqrt{1-\xi}}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} - \\ &- \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2) \left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} = K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned} \quad (94)$$

Подставляя (93) и (94) в (91) и (92), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}}^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}y^2-1}{y^2-1}} dy &= -E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \\ &+ E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{\frac{\xi(1+\xi)}{2(1-\xi)}}, \\ \int_{\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}}^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)\left(\frac{1}{2}y^2-1\right)}} &= \\ &= K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Подставляя (95) в (89), получим:

$$\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1-\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(1-\xi)^{3/2}}{\sqrt{\xi(1+\xi)}} \left[E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\ \left. - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] - (1-\xi) K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (96)$$

Полагая $y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}}$, найдём:

$$\int_1^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}y^2}{y^2-1}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \frac{\sqrt{1-\eta^2} d\eta}{\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)^{3/2}}, \quad (97)$$

$$\int_1^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)}} = \\ = \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} = F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (98)$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}} \right) = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}} + \frac{\frac{1}{2}\eta^2 \sqrt{1-\eta^2}}{\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)^{3/2}} -$$

$$- \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)^{3/2}} - \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}},$$

найдем:

$$\int_0^{\sqrt{1-\xi}} \frac{\sqrt{1-\eta^2} d\eta}{\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} + \sqrt{\frac{(1-\xi)[1-(1-\xi)]}{1-\frac{1}{2}(1-\xi)}} =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{1-\xi}} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2\right)}} - \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\eta^2}{1-\eta^2}} \right] d\eta + \sqrt{\frac{2\xi(1-\xi)}{1+\xi}} =$$

$$= 2F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{\frac{2\xi(1-\xi)}{1+\xi}}. \quad (99)$$

Подставляя (99) в (97), получим:

$$\int_1^{\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}y^2}{y^2-1}} dy =$$

$$= F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{\frac{\xi(1-\xi)}{2(1+\xi)}}. \quad (100)$$

Подставляя (98) и (100) в (90), найдем:

$$\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\xi)^{3/2}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \left[K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(1-\xi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] -$$

$$- (1+\xi) K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (101)$$

Подставляя (96) и (101) в (88), получим:

$$\begin{aligned}
 J(\xi) = & \frac{\sqrt{2}}{2(1-\xi^2)} \left\{ 2K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \right. \\
 & + \sqrt{2\xi(1-\xi^2)} \left[E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\
 & - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \xi(1+\xi)K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left. \right] - \\
 & - \sqrt{2\xi(1-\xi^2)} \left[K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\
 & - K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left. \right] + \\
 & + \xi(1-\xi)K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left. \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2(1-\xi^2)} \left\{ 2(1-\xi^2)K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \right. \\
 & + \sqrt{2\xi(1-\xi^2)} \left[F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - 2E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\},
 \end{aligned}$$

или окончательно:

$$J(\xi) = K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left\{ \sqrt{2} + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi^2}} \left[F\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - 2E\left(\sqrt{1-\xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \right\}. \quad (102)$$

6. В главе II, решая плоскую контактную задачу теории упругости для того случая, когда первоначальное расстояние между точками сжимаемых тел, соприкасающимися при сжатии, пропорционально $|x|^k$ (x — расстояние до первоначальной точки касания), мы пришли к следующим формулам для давления $p(x)$ и полуширины области контакта a (формулы (103) и (104) главы II):

$$p(x) = \frac{P}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \frac{\int_0^1 \frac{t^k dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t^2 - \frac{x^2}{a^2} \right)}, \quad 0 < |x| < a, \quad (103)$$

$$a = \left[\frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2Ak \int_0^1 \frac{t^k dt}{\sqrt{1-t^2}}} \right]^{1/k}. \quad (104)$$

Для случая $k = \frac{2}{3}$, полагая $|x| = a\xi$ и пользуясь обозначениями (1) и (15) для соответствующих эллиптических интегралов, будем иметь:

$$p(a\xi) = \frac{P}{\pi a} \sqrt{1 - \xi^2} \frac{J(\xi)}{C_1}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (105)$$

$$a = \left[\frac{\pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{3AC_1} \right]^{2/3}. \quad (106)$$

Подставляя в (105) и (106) значения эллиптических интегралов C_1 и $J(\xi)$ из (12) и (102), найдём:

$$p(a\xi) = \frac{3P}{\pi a} \sqrt{1 - \xi^2} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\xi}{2(1 - \xi^2)}} \left[F\left(\sqrt{1 - \xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2E\left(\sqrt{1 - \xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] \right\}, \quad (107)$$

$$a = \left[\frac{\sqrt{2} \pi P (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2AK\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \right]^{2/3}. \quad (108)$$

Полагая $\xi = \cos^2 \varphi$, $t = \sin \psi$, будем иметь:

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{1 - \xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \int_0^{\sqrt{1 - \xi}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}, \\ E\left(\sqrt{1 - \xi}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \int_0^{\sqrt{1 - \xi}} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}t^2}{1 - t^2}} dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi} d\psi, \\ p &= \frac{3P}{\pi a} \left[\sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 \varphi \left(\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} - 2 \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} d\varphi \right) \right], \quad (109) \\ &\varphi = \arccos \sqrt{\frac{|x|}{a}}. \end{aligned}$$

Мы пришли, таким образом, к удобной для вычислений формуле, определяющей давление $p(x)$ в области контакта. В соответствии с формулой (109) и построен график распределения давления в области контакта, помещённый для рассматриваемого случая в главе II (рис. 11).

7. В главе III, рассматривая осесимметричную контактную задачу теории упругости для того случая, когда первоначальное расстояние между точками сжимаемых тел, соприкасающимися при сжатии, пропорционально $r^{3/2}$ (r — расстояние до оси симметрии), мы пришли к следующей формуле для давления $p(r)$ в области контакта:

$$p(r) = \frac{5P}{4\pi a^2} f\left(\frac{r}{a}\right), \quad 0 < r < a, \quad (110)$$

где

$$f(\rho) = \sqrt{\rho} \int_{\rho}^1 \frac{dt}{t \sqrt{t(1-t^2)}}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (111)$$

см. формулы (157) и (158) главы III.

Полагая $t = \cos^2 \psi$, $\rho = \cos^2 \varphi$, найдём:

$$f(\cos^2 \varphi) = \sqrt{2} \cos \varphi \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (112)$$

Пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\psi} \left(2 \operatorname{tg} \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi} \right) &= \frac{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}{\cos^2 \psi} - \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} = \\ &= \frac{2 - \sin^2 \psi - \sin^2 \psi \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\cos^2 \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} + \frac{\cos^2 \psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} &= 2 \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} - \\ &- \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} - 2 \int_0^{\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi} d\psi. \quad (113) \end{aligned}$$

Подставляя (113) в (112), получим:

$$f(\cos^2 \varphi) = 2 \sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} + \\ + \sqrt{2} \cos \varphi \left(\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - 2 \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi \right). \quad (114)$$

Полагая в (110) $r = a \cos^2 \varphi$ и подставляя в (110) выражение для $f(\cos^2 \varphi)$ из (114), найдём:

$$p = \frac{5P}{2\pi a^2} \left[\sin \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \left(\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - 2 \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi \right) \right], \quad (115) \\ \varphi = \arccos \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Сравнивая формулы (115) с формулами (109), убеждаемся в том, что распределение давления в области контакта в рассматриваемой осесимметричной контактной задаче то же, что и в соответствующей плоской контактной задаче теории упругости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

1. В главе II, рассматривая задачу о сжатии двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, мы показали, что решение этой задачи сводится к решению интегродифференциального уравнения Прандтля из теории крыла конечного размаха и изложили метод решения этого уравнения, предложенный И. Векуа. Рассматривая, далее, задачу о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость с учётом поверхностных изменений упругой среды, мы пришли к аналогичному интегродифференциальному уравнению, приближённое решение которого также может быть получено методом И. Векуа. После того как одна из функций, входящих в интегродифференциальное уравнение, заменена надлежащим образом построенным приближённым выражением, следуя методу И. Векуа, можно

получить решение такого интегродифференциального уравнения в замкнутом виде. При этом мы приходим, однако, к вычислению определённых интегралов, которые не выражаются в элементарных функциях, и в связи с этим для числовых расчётов могут оказаться более удобными общие приближённые методы решения интегральных уравнений. При расчёте графиков, иллюстрирующих соответствующие параграфы, главы II, мы воспользовались методом конечных разностей. Метод этот заключается в том, что искомая функция предполагается изменяющейся не непрерывно, а скачками. Разбив интервал изменения искомой функции на n частей и предполагая, что в каждом из полученных подинтервалов функция эта сохраняет постоянное значение, мы сводим решение интегрального уравнения к отысканию этих n значений искомой функции. Надлежащим выбором этих значений мы можем добиться того, чтобы интегральное уравнение удовлетворялось в n точках того интервала, в котором это уравнение должно удовлетворяться. Мы приходим, таким образом, к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Решив эти уравнения, мы получим приближённое выражение для искомой функции в виде кусочно-постоянной функции, меняющейся скачками. Построив её график и сгладив скачки, мы получим в итоге плавную кривую, изображающую приближённое решение интегрального уравнения. Ниже мы приводим проделанные нами вычисления.

2. Как мы показали в главе II, § 7, в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, давление $p(\varphi)$ в области контакта определяется интегральным уравнением [глава II, уравнение (31)]:

$$\begin{aligned} & 2(\delta_1 r_1 + \delta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} d\varphi' - \\ & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin |\varphi - \varphi'| d\varphi' + 2\delta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = \\ & = (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi) - \alpha \cos \varphi, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0. \quad (1) \end{aligned}$$

Чтобы исключить из уравнения (1) неизвестную постоянную α , положим в (1) $\varphi = 0$. Получим:

$$\begin{aligned} & 2(\delta_1 r_1 + \delta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi'|}{2} d\varphi' - \\ & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \sin |\varphi'| d\varphi' + 2\delta_1 r_1 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = -\alpha. \quad (2) \end{aligned}$$

Подставляя α из (2) в (1), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \left[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} - \right. \\
 \left. - \cos \varphi \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi'|}{2} \right] d\varphi' - \\
 - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') [\sin |\varphi - \varphi'| - \cos \varphi \sin |\varphi'|] d\varphi' + \\
 + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi), \quad (3) \\
 -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0.
 \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (3) совместно с условием

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{P}{r_1}, \quad (4)$$

где P — сжимающая сила, определяет угол φ_0 и давление $p(\varphi)$ в области контакта $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$. Так как функция $p(\varphi)$ должна быть вследствие симметрии чётной, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') \left[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} - \right. \\
 \left. - \cos \varphi \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi'|}{2} \right] d\varphi' - \\
 - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') [\sin |\varphi - \varphi'| - \cos \varphi \sin |\varphi'|] d\varphi' + \\
 + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = \\
 = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') \left[\cos(\varphi + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi + \varphi'|}{2} - \right. \\
 \left. - \cos \varphi \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \right] d\varphi' - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') [\sin |\varphi + \\
 + \varphi'| - \cos \varphi \sin \varphi'] d\varphi' + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi',
 \end{aligned}$$

в силу чего интегральному уравнению (3) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') \left[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \cos(\varphi + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi + \varphi'|}{2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \right] d\varphi' - \\
 & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') [\sin |\varphi - \varphi'| + \sin |\varphi + \varphi'| - \\
 & \quad - 2 \cos \varphi \sin \varphi'] d\varphi' + 4\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \int_0^{\varphi_0} p(\varphi') d\varphi' = \\
 & = (r_2 - r_1) (1 - \cos \varphi), \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Разобьём интервал $(0, \varphi_0)$ на n равных частей и будем считать, что в каждом из полученных подинтервалов функция $p(\varphi)$ сохраняет постоянное значение:

$$\begin{aligned}
 p(\varphi) &= p_k \quad \text{при } (k-1)\vartheta < \varphi < k\vartheta, \quad (6) \\
 k &= 1, 2, \dots, n, \quad \vartheta = \frac{\varphi_0}{n}.
 \end{aligned}$$

Подставляя $p(\varphi)$ из (6) в (5), получим:

$$\begin{aligned}
 & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \left[\cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \cos(\varphi + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi + \varphi'|}{2} - 2 \cos \varphi \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \right] d\varphi' - \\
 & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin |\varphi - \varphi'| + \sin |\varphi + \varphi'| - \\
 & \quad - 2 \cos \varphi \sin \varphi'] d\varphi' + 4\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \varphi) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} d\varphi' = \\
 & = (r_2 - r_1) (1 - \cos \varphi), \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

В правой и левой частях соотношения (7) стоят чётные функции φ . Следовательно, если соотношение (7) имеет место

для какого-либо положительного значения φ , то оно имеет место и для соответствующего (равного по абсолютной величине) отрицательного значения φ . Далее, при $\varphi = 0$ обе части соотношения (7) обращаются в нуль и, следовательно, равны между собой. Таким образом, если определить p_1, p_2, \dots, p_n так, чтобы соотношение (7) выполнялось при $\varphi = \vartheta, 2\vartheta, \dots, n\vartheta$, то оно будет выполняться во всех точках $\varphi = l\vartheta$ ($l = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$).

Пологая в (7) $\varphi = l\vartheta$ ($l = 1, 2, \dots, n$), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \left[\cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|l\vartheta - \varphi'|}{2} + \right. \\ & \left. + \cos(l\vartheta + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta + \varphi'}{2} - 2 \cos l\vartheta \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \right] d\varphi' - \\ & - (x_1 r_1 + x_2 r_2) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin |l\vartheta - \varphi'| + \sin(l\vartheta + \varphi') - \\ & - 2 \cos l\vartheta \sin \varphi'] d\varphi' + 4\vartheta_1 r_1 (1 - \cos l\vartheta) \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} d\varphi' = \\ & = (r_2 - r_1) (1 - \cos l\vartheta), \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (8) \end{aligned}$$

Перейдём к вычислению определённых интегралов, входящих в уравнения (8). Находим:

при $k \leq l$

$$\begin{aligned} & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|l\vartheta - \varphi'|}{2} d\varphi' = \\ & = \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta - \varphi'}{2} d\varphi' = \\ & = -\sin(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta - \varphi'}{2} - \varphi' \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \\ & = -\sin(l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l-k)\vartheta}{2} + \\ & \quad + \sin(l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l-k+1)\vartheta}{2} - \vartheta; \end{aligned}$$

при $k \geq l + 1$

$$\begin{aligned}
 & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|l\vartheta - \varphi'|}{2} d\varphi' = \\
 & = \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi' - l\vartheta}{2} d\varphi' = \\
 & = -\sin(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi' - l\vartheta}{2} - \varphi' \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \\
 & = -\sin(l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-l)\vartheta}{2} + \sin(l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-l-1)\vartheta}{2} - \vartheta, \\
 & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta + \varphi'}{2} d\varphi' = \\
 & = \sin(l\vartheta + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta + \varphi'}{2} - \varphi' \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \\
 & = \sin(l+k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k)\vartheta}{2} - \sin(l+k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k-1)\vartheta}{2} - \vartheta, \\
 & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} d\varphi' = \sin \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} - \varphi' \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \\
 & = \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - \sin(k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-1)\vartheta}{2} - \vartheta.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \left[\cos(l\vartheta - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|l\vartheta - \varphi'|}{2} + \right. \\
 & \left. + \cos(l\vartheta + \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{l\vartheta + \varphi'}{2} - 2 \cos l\vartheta \cos \varphi' \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \right] d\varphi' = \\
 & = \sin(l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k+1|\vartheta}{2} - \sin(l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k|\vartheta}{2} + \\
 & + \sin(l+k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k)\vartheta}{2} - \sin(l+k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k-1)\vartheta}{2} - \\
 & - 2\vartheta - 2 \cos l\vartheta \left[\sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - \sin(k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-1)\vartheta}{2} - \vartheta \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Далее: при $k \leq l$

$$\begin{aligned}
 & \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \sin |l\vartheta - \varphi'| d\varphi' = \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \sin(l\vartheta - \varphi') d\varphi' = \\
 & = \cos(l\vartheta - \varphi') \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \cos(l-k)\vartheta - \cos(l-k+1)\vartheta;
 \end{aligned}$$

при $k \geq l + 1$

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \sin |l\vartheta - \varphi'| d\varphi' &= \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \sin (\varphi' - l\vartheta) d\varphi' = \\ &= -\cos (\varphi' - l\vartheta) \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = -\cos (l-k)\vartheta + \cos (l-k+1)\vartheta, \\ \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin (l\vartheta + \varphi') - 2 \cos l\vartheta \sin \varphi'] d\varphi' &= \\ &= -\cos (l\vartheta + \varphi') + 2 \cos l\vartheta \cos \varphi' \Big|_{\varphi'=(k-1)\vartheta}^{\varphi'=k\vartheta} = \\ &= -\cos (l+k)\vartheta + \cos (l+k-1)\vartheta + 2 \cos l\vartheta [\cos k\vartheta - \cos (k-1)\vartheta]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin |l\vartheta - \varphi'| + \sin (l\vartheta + \varphi') - 2 \cos l\vartheta \sin \varphi'] d\varphi' &= \\ &= \delta(l-k) [\cos (l-k)\vartheta - \cos (l-k+1)\vartheta] + \\ &+ \cos (l+k-1)\vartheta - \cos (l+k)\vartheta + 2 \cos l\vartheta [\cos k\vartheta - \cos (k-1)\vartheta], \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta(k) &= 1 && \text{при } k \geq 0, \\ \delta(k) &= -1 && \text{при } k \leq -1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_k \left\{ 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[\sin (l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k+1|\vartheta}{2} - \right. \right. \\ \left. - \sin (l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k|\vartheta}{2} + \sin (l+k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k)\vartheta}{2} - \right. \\ \left. - \sin (l+k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k-1)\vartheta}{2} - 2\vartheta \right] + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \{ \delta(l-k) [\cos (l-k+1)\vartheta - \cos (l-k)\vartheta] + \\ + \cos (l+k)\vartheta - \cos (l+k-1)\vartheta \} + \\ + 4\vartheta_1 r_1 \vartheta - 2 \cos l\vartheta \left\{ 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[\sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - \right. \right. \\ \left. - \sin (k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-1)\vartheta}{2} - \vartheta \right] + \\ \left. + (x_1 r_1 + x_2 r_2) [\cos k\vartheta - \cos (k-1)\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \right\} = \\ = (r_2 - r_1) (1 - \cos l\vartheta), \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (12) \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$\Delta_k = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left[\sin(k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|k+1|\vartheta}{2} - \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{|k|\vartheta}{2} - \vartheta \right] + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \delta(k) [\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta. \quad (13)$$

Тогда уравнениям (12) можно будет придать вид:

$$\sum_{k=1}^n p_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2 \cos l\vartheta \Delta_{k-1}) = (r_2 - r_1) (1 - \cos l\vartheta), \quad (14) \\ l = 1, 2, \dots, n,$$

так как

$$\delta(l+k-1) = \delta(k-1) = 1 \quad \text{при } k \geq 1, l \geq 1$$

согласно (11).

При $k \geq 0$ имеем:

$$\Delta_k = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \times \\ \times \left[\sin(k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k+1)\vartheta}{2} - \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - \vartheta \right] + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) [\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta. \quad (15)$$

При $k \geq 1$ имеем также:

$$\Delta_{-k} = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \times \\ \times \left[-\sin(k-1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-1)\vartheta}{2} + \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - \vartheta \right] + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) [-\cos(k-1)\vartheta + \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta,$$

т. е.

$$\Delta_{-k} = \Delta_{k-1} \quad \text{при } k \geq 1. \quad (16)$$

Вводя, далее, обозначения:

$$F(k) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left(\sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - k\vartheta \right) + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \cos k\vartheta + 2\vartheta_1 r_1 k\vartheta, \quad k \geq 0, \quad (17)$$

сможем придать формуле (15) вид:

$$\Delta_k = F(k+1) - F(k), \quad k \geq 0. \quad (18)$$

Объединяя формулы (14), (16), (17) и (18), приходим окончательно к следующей системе уравнений для определения неизвестных p_1, p_2, \dots, p_n :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2 \cos l\vartheta \Delta_{k-1}) &= (r_2 - r_1) (1 - \cos l\vartheta), \\ l &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\Delta_k = F(k+1) - F(k), \quad k \geq 0, \quad \Delta_{-k} = \Delta_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$F(k) = 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \left(\sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - k\vartheta \right) + \\ + (x_1 r_1 + x_2 r_2) \cos k\vartheta + 2\vartheta_1 r_1 k\vartheta.$$

3. Будем в дальнейшем предполагать, что сжимаемые цилиндры выполнены из одного материала, т. е.

$$\vartheta_2 = \vartheta_1, \quad x_2 = x_1, \quad (20)$$

где $\vartheta_1 = \frac{1-\mu^2}{\pi E}$, $x_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E}$, E — модуль упругости и μ — коэффициент Пуассона сжимаемых тел.

Так как по предположению радиусы сжимаемых цилиндров почти равны, можно также положить:

$$r_1 = r_2 = r. \quad (21)$$

Тогда выражение для функции $F(k)$ в формуле (19) примет вид:

$$F(k) = 4\vartheta_1 r \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} - 2\vartheta_1 r k \vartheta + 2x_1 r \cos k\vartheta,$$

или

$$F(k) = -2\vartheta_1 r f(k), \quad (22)$$

где

$$f(k) = -2 \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} + k\vartheta - c \cos k\vartheta, \quad (23)$$

$$c = \frac{x_1}{\vartheta_1} = \frac{\pi(1-2\mu)}{2(1-\mu)}. \quad (24)$$

Полагая, далее

$$\Delta_k = -2\vartheta_1 r \vartheta_k, \quad (25)$$

будем иметь в соответствии с (19) и (22):

$$\vartheta_k = f(k+1) - f(k), \quad k \geq 0, \quad \vartheta_{-k} = \vartheta_{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (26)$$

Подставляя (25) в уравнения для определения неизвестных p_1, \dots, p_n (19), получим уравнения

$$\sum_{k=1}^n p_k (2 \cos l\vartheta \delta_{k-1} - \delta_{l-k} - \delta_{l+k-1}) = \frac{\varepsilon}{2\vartheta r} (1 - \cos l\vartheta),$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

где

$$\varepsilon = r_2 - r_1. \quad (28)$$

Полагая в (27)

$$p_k = \frac{\varepsilon}{2\vartheta r} q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

получим уравнения

$$\sum_{k=1}^n q_k (2 \cos l\vartheta \delta_{k-1} - \delta_{l-k} - \delta_{l+k-1}) = 1 - \cos l\vartheta, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (30)$$

определяющие неизвестные q_1, q_2, \dots, q_n . Решив уравнения (30) для неизвестных q_1, q_2, \dots, q_n , мы затем по формуле (29) сумеем найти p_1, p_2, \dots, p_n .

Ниже мы приводим решения системы уравнений (30) для трёх значений угла φ_0 : $30^\circ, 50^\circ, 60^\circ$, приняв коэффициент Пуассона μ равным 0,3 и положив $n = 5$.

Согласно (24) при $\mu = 0,3$

$$c = \frac{2\pi}{7}.$$

Согласно (23) будем иметь:

$$f(k) = -2 \sin k\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{k\vartheta}{2} + k\vartheta - \frac{2\pi}{7} \cos k\vartheta. \quad (31)$$

Так как $\vartheta = \frac{\varphi_0}{n}$, будем при $n = 5$ иметь:

$\vartheta = 6^\circ$ при $\varphi_0 = 30^\circ$, $\vartheta = 10^\circ$ при $\varphi_0 = 50^\circ$, $\vartheta = 12^\circ$ при $\varphi_0 = 60^\circ$.

Ниже даны значения разностей $\delta_k = f(k+1) - f(k)$, подсчитанных в соответствии с формулой (31).

Таблица δ_k

$k \backslash \varphi_0$	30°	50°	60°	$k \backslash \varphi_0$	30°	50°	60°
0	0,72610	1,03429	1,16584	5	0,16049	0,08526	0,03709
1	0,43974	0,55601	0,59035	6	0,12361	0,03467	-0,00601
2	0,33114	0,37052	0,36513	7	0,09251	0,00143	-0,02024
3	0,25921	0,24664	0,21612	8	0,06607	-0,01515	-0,00601
4	0,20464	0,15470	0,11000	9	0,04393	-0,01515	0,03709

Подставляя из этой таблицы разности δ_k в уравнения (30) и пользуясь при этом соотношениями $\delta_{-k} = \delta_{k-1}$ при $k \geq 1$ (см. (26)), получим уравнения

$$\varphi_0 = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} 0,27839q_1 - 0,18258q_2 - 0,04031q_3 - 0,02020q_4 - 0,01266q_5 &= 0,00548, \\ 0,64959q_1 - 0,12505q_2 - 0,28294q_3 - 0,09314q_4 - 0,05442q_5 &= 0,02186, \\ 0,79081q_1 + 0,19207q_2 - 0,25672q_3 - 0,35666q_4 - 0,14300q_5 &= 0,04894, \\ 0,86282q_1 + 0,31882q_2 + 0,04166q_3 - 0,34501q_4 - 0,41828q_5 &= 0,08646, \\ 0,89252q_1 + 0,37884q_2 + 0,14990q_3 - 0,05685q_4 - 0,41558q_5 &= 0,13398. \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = 50^\circ$$

$$\begin{aligned} 0,44682q_1 - 0,30970q_2 - 0,07288q_3 - 0,03944q_4 - 0,02720q_5 &= 0,01520, \\ 1,01730q_1 - 0,23598q_2 - 0,49264q_3 - 0,17774q_4 - 0,11446q_5 &= 0,06030, \\ 1,17428q_1 + 0,25230q_2 - 0,47780q_3 - 0,64178q_4 - 0,28950q_5 &= 0,13398, \\ 1,18326q_1 + 0,39606q_2 - 0,02304q_3 - 0,65788q_4 - 0,78212q_5 &= 0,23397, \\ 1,08970q_1 + 0,43348q_2 + 0,10438q_3 - 0,22378q_4 - 0,82026q_5 &= 0,35721. \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} 0,52452q_1 - 0,37610q_2 - 0,09218q_3 - 0,05234q_4 - 0,03802q_5 &= 0,02186, \\ 1,17460q_1 - 0,30334q_2 - 0,60872q_3 - 0,23260q_4 - 0,15814q_5 &= 0,08646, \\ 1,30514q_1 + 0,51486q_2 - 0,61214q_3 - 0,81014q_4 - 0,39214q_5 &= 0,19038, \\ 1,23408q_1 + 0,38780q_2 - 0,09570q_3 - 0,85638q_4 - 1,01262q_5 &= 0,33088, \\ 1,01876q_1 + 0,38024q_2 + 0,02024q_3 - 0,36822q_4 - 1,09294q_5 &= 0,50000. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений сведены нами в следующую таблицу.

Таблица q_k

$\varphi_0 \backslash k$	1	2	3	4	5
30°	0,1179	0,1132	0,1034	0,0870	0,0595
50°	0,3437	0,3354	0,3058	0,2560	0,1753
60°	0,8364	0,8020	0,7294	0,6212	0,4055

При $\mu = 0,3$ имеем:

$$\vartheta = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} = \frac{0,91}{\pi E}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (29), найдём:

$$p_k = \frac{\pi}{1,82} q_k \frac{E\varepsilon}{r}. \quad (33)$$

Подставляя найденные значения q_k в (33), получим значения p_k , сведённые нами в следующую таблицу.

Таблица p_k

$\varphi_0 \backslash k$	1	2	3	4	5
30°	0,2035 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,1954 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,1785 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,1502 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,1027 $\frac{E\varepsilon}{r}$
50°	0,6036 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,5790 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,5279 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,4419 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,3025 $\frac{E\varepsilon}{r}$
60°	1,4437 $\frac{E\varepsilon}{r}$	1,3844 $\frac{E\varepsilon}{r}$	1,2591 $\frac{E\varepsilon}{r}$	1,0723 $\frac{E\varepsilon}{r}$	0,6999 $\frac{E\varepsilon}{r}$

Так как по предположению $p(\varphi) = p_k$ при $(k-1)\vartheta < \varphi < k\vartheta$ (см. (6)), полученная таблица даёт возможность для значений 30°, 50° и 60° угла φ_0 построить графики давления p как функции угла φ . Сглаживая получаемые при этом ступенчатые графики, мы придём к тем распределениям давления p в области контакта, которые представлены на рисунках, помещённых в главе II.

Полагая в соотношении (4)

$$p(\varphi) = p_k \quad \text{при} \quad (k-1)\vartheta < \varphi < k\vartheta, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad r_1 = r,$$

найдем:

$$2 \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos \varphi d\varphi = \frac{P}{2}.$$

или

$$2 \sum_{k=1}^n p_k [\sin k\vartheta - \sin (k-1)\vartheta] = \frac{P}{2}. \quad (34)$$

Подставляя (33) в (34), получим:

$$\frac{P}{E\varepsilon} = \frac{\pi}{0,91} \sum_{k=1}^n q_k [\sin k\vartheta - \sin (k-1)\vartheta]. \quad (35)$$

Пользуясь таблицей значений q_k , найдем по формуле (35):

$$\frac{P}{E\varepsilon} = 0,1676 \quad \text{при } \varphi_0 = 30^\circ,$$

$$\frac{P}{E\varepsilon} = 0,7722 \quad \text{при } \varphi_0 = 50^\circ,$$

$$\frac{P}{E\varepsilon} = 2,1118 \quad \text{при } \varphi_0 = 60^\circ.$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{P}{E\varepsilon} = 0 \quad \text{при } \varphi_0 = 0,$$

так как сжимающая сила должна быть равна нулю, для того чтобы контакт осуществлялся в точке. Таким образом, мы получаем четыре точки для построения кривой, выражающей зависимость угла φ_0 от отношения $\frac{P}{E\varepsilon}$. По этим четырём точкам и построена приведённая в главе II кривая, дающая возможность по разности радиусов цилиндров ε , модулю упругости E и сжимающей силе P найти угол φ_0 и определить таким образом размеры области контакта.

Напомним, что если область контакта мала, т. е. при малых значениях угла φ_0 , для решения рассматриваемой контактной задачи можно воспользоваться основным уравнением плоской контактной задачи (будем попрежнему предполагать, что сжимаемые тела из одного материала)

$$\frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a p(x') (\ln|x-x'| - \ln|x'|) dx' = Ax^2, \quad (36)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 l}{dx^2} \right)_{x=l}, \quad (37)$$

$l(x)$ — первоначальное расстояние между точками, соприкасающимися при сжатии.

Совместно с условием

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P \quad (38)$$

уравнение (36) определяет давление $p(x)$ в области контакта и полуширину этой области a . Как мы указывали в главе II, решение этого уравнения приводит к формулам

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad (39)$$

$$a = 2 \sqrt{\frac{(1 - \mu^2) P}{\pi E A}}. \quad (40)$$

Чтобы получить представление о той точности, которую обеспечивает применённый нами выше метод конечных разностей, мы провели этим методом решение уравнения (36), разбив

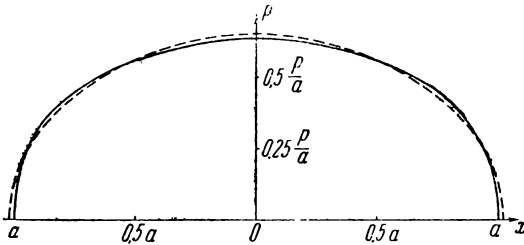


Рис. 54.

полуинтервал изменения функции $p(x)$ — a на 5 равных частей и предположив давление p постоянным в каждом из полученных подинтервалов. В итоге мы пришли к решению интегрального уравнения (36), изображённому сплошной линией на рис. 54. Пунктиром на том же рисунке показано точное решение этого уравнения, построенное в соответствии с формулой (39). Как видим, кривые отличаются одна от другой весьма мало.

Как мы уже отметили выше, при малых значениях угла φ_0 для определения полуширины области контакта a , т. е. величины $r \sin \varphi_0$, можно воспользоваться формулой (40). Полагая в (40) $a = r \sin \varphi_0$, найдём:

$$\varphi_0 = \arcsin 2 \sqrt{\frac{(1 - \mu^2) P}{\pi E A r^2}}. \quad (41)$$

Первоначальное расстояние $l(x)$ между точками, соприкасающимися при сжатии, для случая двух круговых цилиндров будет равно:

$$l(x) = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2} - (r_2 - \sqrt{r_2^2 - x^2}),$$

откуда согласно (37)

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 l}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{r_2 - r_1}{2r_1 r_2},$$

или, если положить в знаменателе $r_1 = r_2 = r$,

$$A = \frac{s}{2r^2}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41), найдём:

$$\varphi_0 = \arcsin 2 \sqrt{\frac{2(1-\mu^2)}{\pi} \frac{P}{E\varepsilon}}. \quad (43)$$

В частности, при $\mu = 0,3$ формула (43) даёт:

$$\varphi_0 = \arcsin 2 \sqrt{\frac{1,82}{\pi} \frac{P}{E\varepsilon}}. \quad (44)$$

В главе II мы сопоставили зависимость угла φ_0 от отношения $\frac{P}{E\varepsilon}$, полученную в результате решения точного интегрального уравнения задачи (сплошная кривая на рисунке), с зависимостью φ_0 от $\frac{P}{E\varepsilon}$, определяемой соотношением (44) (пунктирная кривая на том же рисунке). Как видим, уже для угла $\varphi_0 = 30^\circ$ формула (44), основанная на предположении о малости области контакта, даёт значительную ошибку, при больших значениях угла φ_0 она совсем неприменима.

В главе II мы сопоставили также распределение давления p в области контакта, полученное в результате решения точного интегрального уравнения задачи (сплошные кривые на рисунках), с распределением давления, определяемым известной приближённой формулой

$$p(\varphi) = \frac{P \cos \varphi}{r (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0)} \quad (45)$$

(пунктирные кривые на тех же рисунках).

Представив формулу (45) в виде:

$$p(\varphi) = \frac{P \cos \varphi}{E\varepsilon (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \varphi_0)} \frac{E\varepsilon}{r},$$

и воспользовавшись найденными выше значениями отношения $\frac{P}{E\varepsilon}$ для углов $\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 50^\circ$ и $\varphi_0 = 60^\circ$, найдём:

$$\left. \begin{aligned} p(\varphi) &= 0,1752 \cos \varphi \frac{E\varepsilon}{r} \quad \text{при } \varphi_0 = 30^\circ, \\ p(\varphi) &= 0,5657 \cos \varphi \frac{E\varepsilon}{r} \quad \text{при } \varphi_0 = 50^\circ, \\ p(\varphi) &= 1,4267 \cos \varphi \frac{E\varepsilon}{r} \quad \text{при } \varphi_0 = 60^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

В соответствии с формулами (46) и построены указанные пунктирные кривые.

4. Рассматривая задачу о давлении жёсткого штампа на упругую полуплоскость с учётом поверхностных изменений упругой среды, мы пришли в главе II к решению интегрального уравнения [глава II, уравнение (286)]:

$$\pi p(a\xi) - c \int_{-1}^1 p(a\tau) \ln |\tau - \xi| d\tau = \alpha, \quad -1 < \xi < 1, \quad (47)$$

где $p(x)$ — давление под штампом, a — полуширина штампа, c — параметр, зависящий от упругих постоянных и от поверхностных свойств той упругой среды, на которую давит штамп, α — неопределённая постоянная. Вместе с условием

$$\int_{-1}^1 p(a\tau) d\tau = \frac{P}{a} \quad (48)$$

уравнение (47) однозначно определяет искомую функцию.

Для построения графиков распределения давления под штампом, приведённых в главе II, для различных значений параметра c мы также воспользовались методом конечных разностей. Ниже мы помещаем проделанные нами расчёты.

Так как функция $p(x)$ — чётная, т. е. $p(-x) = p(x)$, имеем:

$$\int_{-1}^0 p(a\tau) \ln |\tau - \xi| d\tau = \int_0^1 p(-a\tau) \ln |-\tau - \xi| d\tau = \int_0^1 p(a\tau) \ln |\tau + \xi| d\tau,$$

и уравнению (47) можно придать вид:

$$\pi p(a\xi) - c \int_0^1 p(a\tau) [\ln |\tau - \xi| + \ln (\tau + \xi)] d\tau = \alpha, \quad 0 < \xi < 1. \quad (49)$$

Разобьём интервал $(0, a)$ на n равных частей и в каждом из полученных подинтервалов будем считать давление $p(x)$

ПОСТОЯННЫМ:

$$p(x) = p_k \quad \text{при } (k-1) \frac{a}{n} < x < k \frac{a}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

Полагая в (50) $x = a\xi$, найдём:

$$p(a\xi) = p_k \quad \text{при } \frac{k-1}{n} < \xi < \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (51)$$

Определим теперь величины p_1, p_2, \dots, p_n с таким расчётом, чтобы уравнение (49) удовлетворялось в n точках $\xi = \frac{2l-1}{2n}$ ($l = 1, 2, \dots, n$), т. е. чтобы имели место равенства

$$\pi p \left(a \frac{2l-1}{2n} \right) - c \int_0^1 p(a\tau) \left[\ln \left| \tau - \frac{2l-1}{2n} \right| + \ln \left(\tau + \frac{2l-1}{2n} \right) \right] d\tau = \alpha, \\ l = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Подставляя (51) в (52), получим уравнения

$$\pi p_l - c \sum_{k=1}^n \nu_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\ln \left| \tau - \frac{2l-1}{2n} \right| + \ln \left(\tau + \frac{2l-1}{n} \right) \right] d\tau = \alpha, \quad (53) \\ l = 1, 2, \dots, n.$$

При $k \geq l+1$ находим:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln \left| \tau - \frac{2l-1}{2n} \right| d\tau = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) d\tau = \\ = \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) \ln \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) - \tau \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \\ = \frac{2k-2l+1}{2n} \ln \frac{2k-2l+1}{2n} - \frac{2k-2l-1}{2n} \ln \frac{2k-2l-1}{2n} - \frac{1}{n};$$

при $k \leq l-1$ находим:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln \left| \tau - \frac{2l-1}{2n} \right| d\tau = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln \left(\frac{2l-1}{2n} - \tau \right) d\tau = \\ = \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) \ln \left(\frac{2l-1}{2n} - \tau \right) - \tau \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \\ = \frac{2k-2l+1}{2n} \ln \frac{2l-2k+1}{2n} - \frac{2k-2l-1}{2n} \ln \frac{2l-2k+1}{2n} - \frac{1}{n};$$

и, наконец, при $k=l$ находим:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} \ln \left| \tau - \frac{2l-1}{2n} \right| d\tau = \int_{\frac{l-1}{n}}^{\frac{2l-1}{2n}} \ln \left(\frac{2l-1}{2n} - \tau \right) d\tau +$$

$$+ \int_{\frac{2l-1}{2n}}^{l/n} \ln \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) d\tau = \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) \ln \left(\frac{2l-1}{2n} - \tau \right) -$$

$$- \tau \left| \frac{2l-1}{2n} \right| + \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) \ln \left(\tau - \frac{2l-1}{2n} \right) - \tau \Big|_{\frac{2l-1}{2n}}^{l/n} = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} \ln \left| \tau - \frac{2n-1}{2n} \right| d\tau = \frac{2k-2l+1}{2n} \ln \frac{|2k-2l+1|}{2n} -$$

$$- \frac{2k-2l-1}{2n} \ln \frac{|2k-2l-1|}{2n} - \frac{1}{n}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (54)$$

Далее:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} \ln \left(\tau + \frac{2l-1}{2n} \right) d\tau = \left(\tau + \frac{2l-1}{2n} \right) \ln \left(\tau + \frac{2l-1}{2n} \right) - \tau \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} =$$

$$= \frac{2k+2l-1}{2n} \ln \frac{2k+2l-1}{2n} - \frac{2k+2l-3}{2n} \ln \frac{2k+2l-3}{2n} - \frac{1}{n},$$

$$k=1, 2, \dots, n. \quad (55)$$

Подставляя (54) и (55) в (53) и заменяя для удобства вычислений натуральные логарифмы десятичными, получим систему уравнений

$$\lambda p_l - \sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{2k-2l+1}{2n} \lg \frac{|2k-2l+1|}{2n} -$$

$$- \frac{2k-2l-1}{2n} \lg \frac{|2k-2l-1|}{2n} + \frac{2k+2l-1}{2n} \lg \frac{2k+2l-1}{2n} -$$

$$- \frac{2k+2l-3}{2n} \lg \frac{2k+2l-3}{2n} - \frac{2}{n} \right) = \frac{\alpha M}{c}, \quad l=1, 2, \dots, n, \quad (56)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi M}{c}, \quad M = \lg e = 0,43429. \quad (57)$$

Подставляя (51) в (48), найдём:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{P}{2n}. \quad (58)$$

Уравнения (56) и (58) определяют неизвестные p_1, p_2, \dots, p_n и попутно постоянную $\frac{\alpha M}{c}$. Определив p_1, p_2, \dots, p_n , мы в соответствии с формулой (50) получим приближённое решение интегрального уравнения (47) в форме кусочно-постоянной функции.

5. Полагая в (56) $n = 5$ и принимая во внимание (58), мы получим уравнения

$$\begin{aligned} (0,25686 + \lambda) p_1 + 0,05052 p_2 - 0,04843 p_3 - 0,10934 p_4 - \\ - 0,15396 p_5 = \frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}, \\ 0,05052 p_1 + (0,15791 + \lambda) p_2 - 0,01039 p_3 - 0,09305 p_4 - \\ - 0,14468 p_5 = \frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}, \\ - 0,04843 p_1 - 0,01039 p_2 + (0,11329 + \lambda) p_3 - 0,04573 p_4 - \\ - 0,12236 p_5 = \frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}, \\ - 0,10934 p_1 - 0,09305 p_2 - 0,04573 p_3 + (0,08398 + \lambda) p_4 - \\ - 0,07077 p_5 = \frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}, \\ - 0,15396 p_1 - 0,14468 p_2 - 0,12236 p_3 - 0,07077 p_4 + \\ + (0,06214 + \lambda) p_5 = \frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений постоянную $\frac{\alpha M}{c} - \frac{P}{a}$, получим четыре уравнения

$$\begin{aligned} (0,20634 + \lambda) p_1 - (0,10739 + \lambda) p_2 - 0,03804 p_3 - \\ - 0,01629 p_4 - 0,00928 p_5 = 0, \\ 0,09895 p_1 + (0,16830 + \lambda) p_2 - (0,12368 + \lambda) p_3 - \\ - 0,04732 p_4 - 0,02232 p_5 = 0, \\ 0,06091 p_1 + 0,08266 p_2 + (0,15902 + \lambda) p_3 - \\ - (0,12971 + \lambda) p_4 - 0,05159 p_5 = 0, \\ 0,04462 p_1 + 0,05163 p_2 + 0,07663 p_3 + (0,15475 + \lambda) p_4 - \\ - (0,13291 + \lambda) p_5 = 0, \end{aligned}$$

которые вместе с уравнением (58)

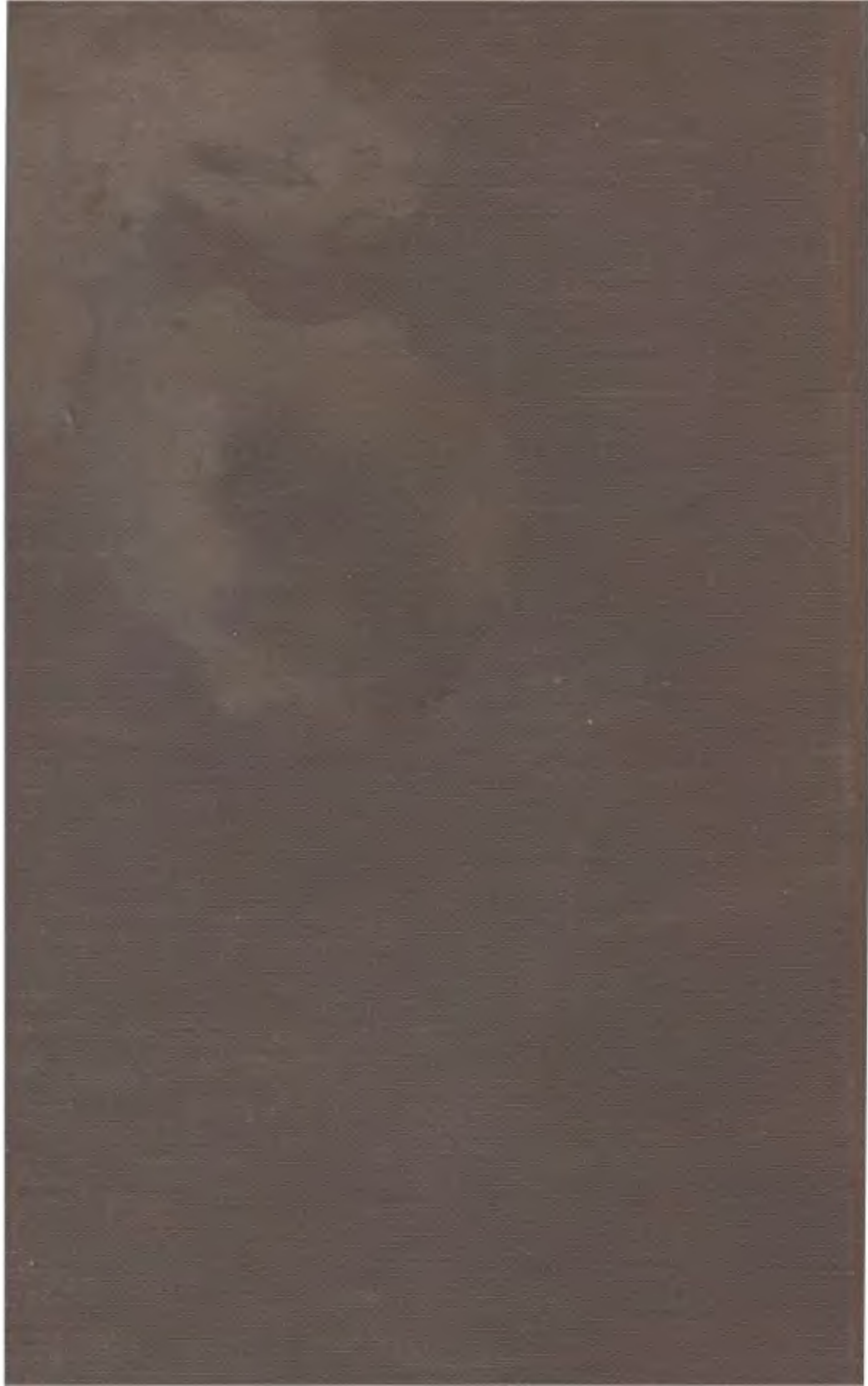
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{5}{2} \frac{P}{a}$$

определяют неизвестные p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 . В приводимой ниже таблице указаны решения этих уравнений для трёх значений параметра c , а именно: $c=10$, $c=1$ и $c=0,1$ (т. е. согласно (57) для $\lambda=0,13644$, $\lambda=1,3644$ и $\lambda=13,644$).

Таблица p_k

$c \backslash k$	1	2	3	4	5
10	$0,3658 \frac{P}{a}$	$0,3827 \frac{P}{a}$	$0,4239 \frac{P}{a}$	$0,5157 \frac{P}{a}$	$0,8121 \frac{P}{a}$
1	$0,4558 \frac{P}{a}$	$0,4645 \frac{P}{a}$	$0,4836 \frac{P}{a}$	$0,5171 \frac{P}{a}$	$0,5791 \frac{P}{a}$
0,1	$0,4943 \frac{P}{a}$	$0,4966 \frac{P}{a}$	$0,4982 \frac{P}{a}$	$0,5025 \frac{P}{a}$	$0,5096 \frac{P}{a}$

Построив в соответствии с формулой (50) и приведённой выше таблицей p_k графики функций $p(x)$ и сгладив их, мы получим для $c=10$, $c=1$ и $c=0,1$ кривые распределения давления под штампом, приведённые в главе II.



И. Я. Шпаерман

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГОСТЕХИЗАТ-1949