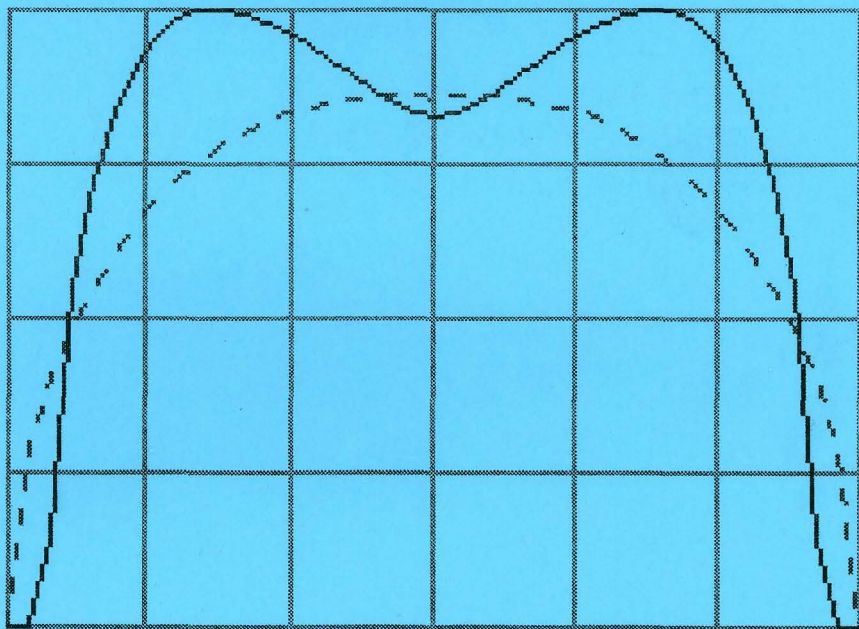


А.А. Королев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УПРУГИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**



Министерство образования Российской Федерации

Саратовский государственный технический университет

А.А. Королев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УПРУГИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Саратов 2001

УДК 539.3 621.75

ББК 30.121

К 66

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор В.В. Петров
зав. кафедрой «Сопротивление материалов» СГТУ

Доктор технических наук, профессор СГТУ П.Ю. Бочкарев

Королев А.А.

К 66

Математическое моделирование упругих тел сложной
формы. - Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001. - 128 с.

ISBN 5-7433-0940-X

Излагаются теоретические основы локального контакта упругих тел сложной геометрической формы, учитывающие непостоянство эксцентриситета эллипса контакта и различные формы профилей начального зазора в главных сечениях, описываемых степенными зависимостями с произвольными показателями степени. Выполнен анализ влияния геометрической формы упругих тел на параметры контакта реальных опор трения, показывающего, что за счет изменения формы тел можно управлять формой эпюры контактных напряжений, а следовательно, в значительной степени эксплуатационными свойствами поверхностей контакта. Рассмотрена возможность изготовления деталей опор трения качения с рациональной геометрической формой на технологических операциях шлифования. Приведены результаты исследования технологических возможностей процесса шлифования дорожек качения шарикоподшипников с рациональной геометрической формой наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом.

Для научных работников и инженеров, аспирантов и студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Табл.2. Ил.58. Библиогр. 99 назв.

УДК 539.3 621.75

ББК 30.121

ISBN 5-7433-0940-X

© Саратовский государственный
технический университет, 2001
© Королев А.А., 2001

Введение

Известно, что от параметров контакта упругих поверхностей деталей во многом зависит работоспособность различных механизмов и машин. Это в первую очередь относится к опорам трения качения, так как характер распределения контактных напряжений, размеры и форма площадки контакта определяют и их опорную способность, и трение на поверхности контакта, и циклическую прочность поверхностей, и их износостойкость. Поэтому обеспечение рациональных параметров контакта упругих тел позволяет увеличить надежность и ресурс машин и механизмов, конкурентоспособность оборудования на мировом рынке, а значит, является проблемой первостепенной важности.

Весьма важным направлением в повышении качества опор трения качения является технологическое обеспечение рациональной геометрической формы их рабочих поверхностей: тел и дорожек качения. В работах В.М. Александрова, О.Ю. Давиденко, А.В. Королева, А.И. Лурье, А.В. Орлова, И.Я. Штаермана и др. убедительно показано, что придание рабочим поверхностям упруго контактирующих деталей механизмов и машин рациональной геометрической формы позволяет существенно улучшить параметры упругого контакта и значительно повысить эксплуатационные свойства узлов трения.

Однако современная теория упругого контакта не позволяет в достаточной мере осуществлять поиск рациональной геометрической формы контактирующих поверхностей в достаточно широком диапазоне условий работы опор трения качения. Экспериментальный поиск в этой области ограничен сложностью применяемой измерительной техники и экспериментального оборудования, а также высокой трудоемкостью и длительностью исследований. Поэтому в настоящее время отсутствует универсальная методика выбора рациональной геометрической формы контактирующих поверхностей деталей машин и приборов.

Серьезной проблемой на пути практического использования узлов трения качения машин с рациональной геометрией контакта является отсутствие эффективных способов их изготовления. Современные способы шлифования и доводки поверхностей деталей машин рассчитаны в основном на изготовления поверхностей деталей относительно простой геометрической формы, профили которых очерчены круговыми или прямыми линиями. Способы формообразующего суперфиниширования, разработанные саратовской научной школой, весьма эффективны, но их практическое применение рассчитано только на обработку наружных поверхностей типа дорожек качения внутренних колец роликоподшипников, что ограничивает их технологические возможности. Все это не позволяет, например, эффективно управлять формой эпюр контактных напряжений целого ряда конструкций опор трения качения, а следовательно, существенно влиять на их эксплуатационные свойства.

Таким образом, обеспечение системного подхода к совершенствованию геометрической формы рабочих поверхностей узлов трения качения и его технологического обеспечения следует рассматривать как одно из важнейших направлений дальнейшего повышения эксплуатационных свойств механизмов и машин. С одной стороны, изучение влияния геометрической формы контактирующих упругих тел сложной формы на параметры их упругого контакта позволяет создать универсальную методику совершенствования конструкции опор трения качения. С другой стороны, разработка основ технологического обеспечения заданной формы деталей обеспечивает эффективное производство опор трения качения механизмов и машин с повышенными эксплуатационными свойствами.

Поэтому разработка теоретических и технологических основ совершенствования параметров упругого контакта деталей опор трения качения и создание на этой основе высокоэффективных технологий и оборудования для производства деталей подшипников качения является научной проблемой, имеющей важное значение для развития отечественного машиностроения.

Автор считает своим долгом выразить особую благодарность за ценные советы и многостороннюю помощь, оказанную при выполнении данной работы, Заслуженному деятелю науки РФ, доктору технических наук, профессору, академику РАН Ю.В. Чеботаревскому и доктору технических наук, профессору Д.Г. Евсееву.

ГЛАВА 1. КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ И ЕГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1.1. Системный анализ современного состояния и тенденций в области совершенствования геометрических параметров рабочих поверхностей опор качения

1.1.1. Современное состояние теории локального упругого контакта тел сложной формы и оптимизации геометрических параметров контакта

Известно, что развитие современной техники идет по пути достижения предельно высоких скоростей вращения валов в сочетании с действующими на них значительными нагрузками. В настоящее время подшипники авиационных газовых турбин работают в диапазоне $d \cdot n = 1,5 \cdot 10^6 \dots 2 \cdot 10^6$ ($d \cdot n$ - произведение диаметра отверстия подшипника на частоту вращения вала). Конструкторы считают, что к 2005 году параметр $d \cdot n$ для турбинных подшипников достигнет значения $3,5 \cdot 10^6 \dots 4,0 \cdot 10^6$.

Возрастающие при этом трения между телами качения и беговыми дорожками могут привести к сильному снижению эксплуатационных характеристик подшипников, так как известно, что условия работы на площадке контакта во многом определяют их работоспособность.

Теория и практика показывают, что на работоспособность различных механизмов и машин особое влияние оказывает геометрическая форма контактирующих рабочих поверхностей деталей. Это впервые теоретически доказали родоначальники теории локального контакта упругих тел Н.М. Беляев [1], А.Н. Динник [2], Г. Герц [3]. Но теория Г. Герца построена из предположения, что начальный зазор в главных сечениях контактирующих тел описывается квадратичной функцией, имеющей в декартовой системе координат $ZOXY$ следующий вид:

$$z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2, \quad (1.1)$$

где $z_1 - z_2$ - величина зазора между контактирующими телами;

x и y - координаты смежных точек контактирующих тел;

A и B - постоянные коэффициенты.

Площадка контакта таких тел представляет собой эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b - полуоси эллипса контакта, расположенные вдоль осей OX и OY .

Кроме того, Г. Герц делал следующие допущения:

- Материалы контактирующих деталей однородны и изотропны;
- Нагрузки, приложенные к деталям, создают в зоне контакта только упругие деформации;
- Площадка контакта мала по сравнению с поверхностями деталей;
- Поверхности деталей в зоне контакта имеют правильную геометрическую форму;
- Силы давления нормальны к поверхности детали;
- Поверхности контактирующих тел абсолютно гладкие.

Однако если сравнивать кривые функций зазора между контактирующими телами, представленные степенной зависимостью второй и, например, четвертой степени, то из рис. 1.1 можно убедиться в том, что они пересекаются между собой.

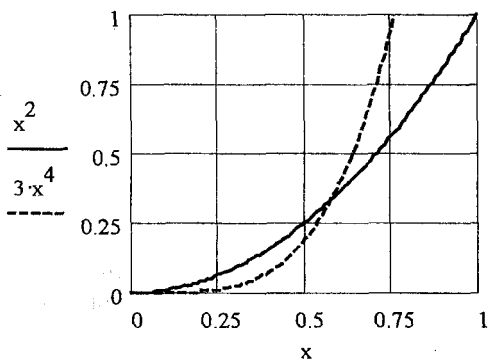


Рис. 1.1. Графики функций зазора между контактирующими телами вблизи точки контакта, описываемых степенными зависимостями второй и четвертой степени

Вблизи точки контакта тел функция зазора четвертой степени обеспечивает более плотное прилегание тел, чем функция зазора второй степени. А на некотором удалении от начальной точки контакта величина зазора, описываемая степенной зависимостью четвертой степени, будет боль-

ше, чем величина зазора, соответствующая степенной зависимости второй степени. Следовательно, при определенной внешней нагрузке у этих тел могут быть разные площадки контакта, а следовательно, и разные эпюры напряжений в зоне контакта.

Таким образом, при плотном контакте тела, форма которого отлична от формы тела вращения, допущение о малости площадки контакта по сравнению с размерами самих тел не всегда приемлемо, и теория Герца может дать существенные погрешности в расчетах. Кроме того, с практической точки зрения важно определить влияние формы контактирующих тел на параметры упругого контакта, а теория Герца не позволяет этого сделать.

Большой вклад в теорию упругого контакта внесли В.М. Александров [4-7 и др.], Ю.А. Амензаде [8], Л.А. Галин [9], А.И. Лурье [10,11], М.Я. Леонов [12,13], Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, [14], А. Ляв [15], Н.И. Мухелишвили [16], С.П. Тимошенко [17], И.Я. Штаерман [18] и другие. Работы этих авторов имеют большое теоретическое и практическое значение, так как позволяют решать проблему определения напряженно-деформированного состояния тел при различных условиях их взаимодействия. В результате исследований этих и других авторов стало возможным определение действующих напряжений и деформаций вблизи зоны контакта для случаев взаимодействия тел, не однородных по материалу, имеющих неоднородные слои материалов, с несимметричным нагружением, с неоднородной поверхностью контакта, имеющих различную форму: клина, конуса, усеченной сферы, параллелепипеда, цилиндра, тора и т.д.

Обычно задача о контакте упругих тел под воздействием нормальной нагрузки ставится следующим образом [8,11,14,15,17]. Пусть два упругих тела имеют первоначальный точечный контакт. Выбирают эту точку за начало декартовых координат (рис.1.2). Оси XOY лежат в общей касательной плоскости, а ось Z направляют через точку O перпендикулярно этой плоскости вовнутрь одного из контактирующих тел. Берутся две точки $M_1(x, y, z_1)$ и $M_2(x, y, z_2)$, лежащие на одной нормали к касательной плоскости и принадлежащие соответственно первому и второму контактирующим телам. Считается, что первоначальное расстояние между этими точками определяется равенством (1.1).

Под воздействием нормальной нагрузки P точки контактирующих тел сближаются на величину δ (пока не известную) и деформируются соответственно на величину $w_1(x, y, z)$ и $w_2(x, y, z)$. Здесь рассматривается только вертикальное перемещение и считается, что касательные напряжения отсутствуют. Таким образом, координата точки M_1 после воздействия

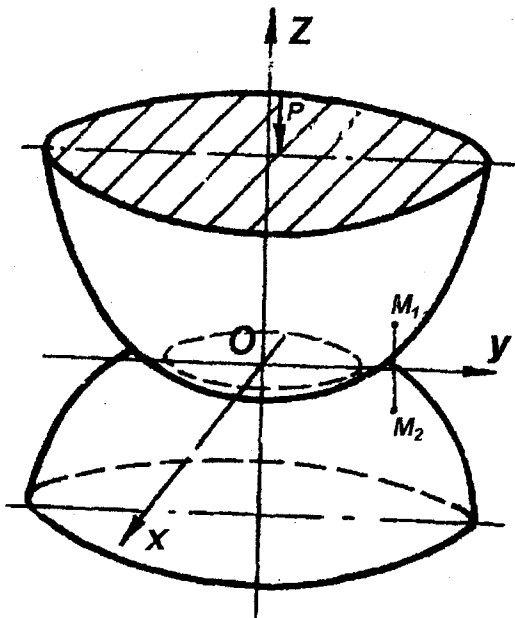


Рис.1.2. Схема сжатия упругих тел

нагрузки станет равной $(x, y, z_1 - \delta_1 + w_1(x, y, z_1))$, координата точки M_2 будет иметь величину $(x, y, z_2 + \delta_2 - w_1(x, y, z_1))$, а расстояние между точками будет равным:

$$|M_1 M_2| = z_1 - z_2 - (\delta_1 + \delta_2) + w_1(x, y, z_1) + w_2(x, y, z_1) = z_1 - z_2 - \delta + w_1(x, y, z_1) + w_2(x, y, z_1).$$

Тогда после того, как точки M_1 и M_2 вступят в контакт, очевидно, будет выполняться условие:

$$z_1 - z_2 - \delta + w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0) = 0,$$

откуда:

$$w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0) = \delta - (z_1 - z_2) = \delta - Ax^2 - By^2. \quad (1.2)$$

С другой стороны, если обозначить через $q(x, y)$ напряжение в точке (x, y) на площадке контакта, то вертикальное перемещение можно найти из выражения [11]:

$$w_1(x, y, 0) = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dS; \quad (1.3)$$

$$w_2(x, y, 0) = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dS.$$

Сопоставляя (1.1) и (1.2), можно записать:

$$w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0) = \left(\frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \times \\ \times \iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dS = \delta - Ax^2 - By^2$$

или

$$\iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dS = \begin{cases} \delta_1 - A_1 x^2 - B_1 y^2, & (x, y) \in S, z = 0 \\ 0, & (x, y) \notin S, z = 0 \end{cases}, \quad (1.4)$$

где

$$\delta_1 = \lambda \cdot \delta; \quad A_1 = \lambda \cdot A; \quad B_1 = \lambda \cdot B;$$

$$\lambda = \frac{\pi E_1 E_2}{E_2(1 - \mu_1^2) + E_1(1 - \mu_2^2)}.$$

Если ввести обозначение:

$$\omega(x, y, z) = \iint_S \frac{q(x', y') dS}{s \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}, \quad (1.5)$$

то условие (1.4) можно переписать следующим образом:

$$\omega(x, y, 0) = \begin{cases} \delta_1 - A_1 x^2 - B_1 y^2, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S. \end{cases} \quad (1.6)$$

Как известно, функция (1.5) является потенциалом простого слоя, распределенного по площадке S с интенсивностью $q(x, y)$, а значит, оно является решением уравнения Лапласа. Таким образом, ставится первая краевая задача (задача Дирихле): определить гармоническую функцию $\omega(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \omega(x, y, z) = 0$$

во всех точках полупространства, с условиями на границе (1.6).

Как известно [11], эта задача ничем по сути не отличается от задачи эллиптического неплоского в плане штампа. Из выражения (1.6) видно, что потенциал $\omega(x, y, z)$ в точках области контакта является квадратичной функцией. С другой стороны, известно, что потенциал во внутренних точках однородного эллипсоида (с постоянной объемной плотностью ρ):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

имеет вид:

$$\omega(x, y, z) = \pi abc \rho \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} d\lambda.$$

Переходя к пределу $c \rightarrow 0$, получим $z = 0$, а предыдущее выражение примет следующий вид:

$$\omega(x, y, 0) = \pi abc \rho \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda} d\lambda. \quad (1.7)$$

Из равенства (1.7) видно, что потенциал является квадратичной функцией координат. Кроме того, можно заметить, что потенциал однородного эллипсоида в точке (x, y, z) имеет вид:

$$\omega(x, y, z) = \iiint_V \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.$$

Переходя здесь к пределу $c \rightarrow 0$ ($z = z' = 0$) и интегрируя по dz' в пределах $\pm c \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$, получим:

$$\omega(x, y, 0) = 2\rho c \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}, \quad (1.8)$$

где интегрирование ведется по эллиптической площадке:

$$\Omega: \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (1.9)$$

Сравнивая выражения (1.7) и (1.8), запишем:

$$\iint_{\Omega} \frac{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda} d\lambda. \quad (1.10)$$

Как видно из (1.10), потенциал однородного эллипсоида, с одной стороны, является потенциалом простого слоя, а с другой стороны, является квадратичной функцией координат. Это же самое можно заметить и про искомую гармоническую функцию, которая, как следует из (1.4), (1.5) и (1.6), является также потенциалом простого слоя и квадратичной функцией

координат. Т.е. для точек площадки контакта имеет место равенство:

$$\iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dS = \delta_1 - A_1 x^2 - B_1 y^2.$$

Поэтому, если положить, что $S = \Omega$, то, сравнивая левые части этого и предыдущего выражения (1.10), можно прийти к выводу, что

$$q(x, y) = \lambda_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (1.11)$$

где λ_0 - некоторая константа.

Таким образом, если в качестве решения краевой задачи принять потенциал однородного эллипсоида, а с другой стороны, считать, что площадка контакта упругих тел есть эллипс, то напряжения по площадке можно определить из (1.11).

Постоянную λ_0 определяют из условия равновесия:

$$P = \iint_S q(x', y') dS. \quad (1.12)$$

Подставив (1.11) в (1.12), найдем:

$$\begin{aligned} P &= 4\lambda_0 \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy dx = 4\lambda_0 \int_0^a \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \\ &= 4\lambda_0 \frac{\pi b}{4} \cdot \frac{2}{3} a = \lambda_0 \frac{2\pi ab}{3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lambda_0 = \frac{3P}{2\pi ab}. \quad (1.13)$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$q(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (1.14)$$

Как можно заметить, при решении контактной задачи Герца существенную роль сыграло то обстоятельство, что функция зазора между контактирующими телами в начальный момент времени являлась квадратичной функцией (1.1). Однако, как говорилось выше и как показывают практические исследования, изменение первоначального зазора сильно влияет на закон распределения давлений по площадке контакта.

В связи с этим, на наш взгляд, большое прикладное значение имеют работы В.М. Александрова, А.И. Лурье, И.Я. Штаермана, которые направлены на решение задачи упругого контакта тел сложной формы. И.Я. Шта-

ерман [18] дал решение контактной задачи тел с круговой площадкой контакта и формой начального зазора, описываемого степенной функцией с четной степенью. Кроме того, И.Я.Штаерман получил решение задачи для тел с эллиптической площадкой контакта с начальным зазором, описываемым в главных сечениях степенной зависимостью четвертой степени.

Он принял общий вид функции напряжения на эллиптической площадке в виде:

$$q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \sum_{k=0}^n a_k \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^k. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в выражение (1.5) при $z = 0$ он получил потенциал эллиптического диска в виде:

$$\omega(x, y, 0) = \pi ab \int_0^\pi \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)(2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k-2)2k} a_k \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right)^k \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (1.16)$$

где a_0 определяется в случае задачи о плоском штампе, а в случае контакта упругих тел с односточечным начальным контактом полагается равной нулю. Как видно из (1.16) потенциал $\omega(x, y, 0)$ является полиномом степени $2n$.

В этой же работе приводится решение контактных задач для $n = 0$ (плоского эллиптического штампа), $n = 1$ (рассмотренная задача Герца), $n = 2$, когда первоначальная форма зазора удовлетворяет уравнению:

$$z_1 - z_2 = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4, \quad (1.17)$$

причем, при условии, что $A > 0$, $0 < C \leq A$.

Как уже отмечалось, при решении задачи Герца, в некоторых случаях (как будет показано ниже - только при условии, что зазор в главных сечениях определяется параболой с одинаковыми степенями) задачу о контакте упругих тел по эллиптической площадке можно свести к задаче о вдавливании эллиптического в плане штампа в упругое полупространство. В работе [4] приведено решение о вдавливании эллиптического в плане штампа в упругое полупространство при условии, что форма штампа описывается произвольным полиномом степени N . Другими словами, решается задача Дирихле при следующем краевом условии:

$$\iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dS = \begin{cases} 2\pi\theta \cdot \delta(x, y), & (x, y) \in S, z=0 \\ 0, & (x, y) \notin S, z=0 \end{cases} \quad (1.18)$$

где

$$\delta(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l b_{ij} x^i y^j, \quad k+l=N. \quad (1.19)$$

Решение уравнения (1.18) имеет вид:

$$q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad n+m=N. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в левую часть (1.18), получают:

$$\iint_S \frac{q(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dS = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} J_{ij}(x, y), \quad (1.21)$$

где

$$J_{ij}(x, y) = \iint_S \frac{x'^i y'^j}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dS. \quad (1.22)$$

Как показано в той же работе [4], выражение (1.22) можно переписать в виде:

$$J_{ij}(x, y) = 2 \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j C_i^r C_j^s B\left(\frac{r+s+1}{2}, \frac{1}{2}\right) (1-e^2)^{\frac{r-s+2j+1}{2}} \times \\ \times \sum_{q=0}^{\frac{r+s}{2}} C_{r+s}^q (-1)^{\frac{r-s}{2}-q} \cdot a^{2q+1} \cdot \sum_{p=0}^{j+j-2q} C_{i+j-2q}^p \cdot x^{i+j-2q-p} \cdot y^p \times \\ \times S_{i-q+\frac{j-p+s-r}{2}, j+p-s+r, 2} \quad (1.23)$$

где величины $r+s$ и $j+p$ - четные; e - эксцентриситет эллипса контакта;

$C_k^s = \frac{k!}{(k-s)!s!}$ - биномиальные коэффициенты; $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ - бета-функция; $\Gamma(x)$ - гамма функция,

$$S_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2m} \varphi \cdot \sin^{2n} \varphi}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{m+n+\frac{1}{2}}} d\varphi. \quad (1.24)$$

Из (1.23) и (1.21) видно, что если напряжение внутри площадки контакта распределено по закону (1.20), то в этом случае потенциал эллиптической пластинки является полиномом N степени. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y , можно определить по известным коэффициентам b_{ij} неизвестные коэффициенты a_{ij} . Таким образом, задача о вдавливании эллиптического в плане штампа решена. Однако это решение не всегда можно свести к решению контактной задачи упругих тел, где первоначальный зазор описывается степенной функцией произвольной степени, как это было возможно при решении классической задачи Герца. Свести эту задачу к задаче о эллиптическом в плане штампе возможно лишь тогда, когда, как это будет показано в дальнейшем, эксцентриситет эллиптической площадки контакта является постоянной величиной, т.е. не зависит от нормальной нагрузки, действующей на контактирующие тела.

Таким образом, мы видим, что решение, предложенное И.Я. Штаерманом [18] и впоследствии В.М. Александровым [4], показывает значительное влияние формы контактирующих тел на параметры их упругого контакта.

Наиболее полное решение задачи контакта тел сложной формы разработал А.В. Королев [19]. В частности, он выполнил расчет контакта упругих тел с эллиптической площадкой контакта, у которых функция начального зазора в главных сечениях деталей описывается степенной зависимостью одинаковой степени:

$$z_1 - z_2 = Ax^n + By^n,$$

где n - любое целое число.

Методика расчета для этого случая будет показана далее, так как будет использована автором для более общего случая решения задачи о контакте упругих тел.

Значительное влияние геометрической формы контактирующих поверхностей на работоспособность деталей подтверждается экспериментально. В области оптимизации профиля желоба накоплен достаточно большой опыт как в нашей стране, так и за рубежом. Авторы указанных работ единодушны в том, что выравнивание контактных напряжений по длине площадки контакта и снижение их уровня является одним из наиболее существенных, если не самым существенным резервом улучшения эксплуатационных характеристик опор качения.

Задача оптимизации контакта между телами качения и дорожками качения шарикоподшипников решается в основном в двух взаимосвязанных направлениях:

- в направлении снижения удельной нагрузки на контакте;

- оптимизации форм сопряженных поверхностей.

В направлении снижения удельной нагрузки на контакте известен целый ряд конструктивных разработок [28, 29 и др.]. Наибольший интерес представляют:

- а) арочная конструкция желоба;
- б) использование полых тел качения;
- в) применение колец пониженной жесткости.

Как показали исследования, применение арочной конструкции желоба наиболее эффективно при высоких скоростях и малых нагрузках. Долговечность при этом возрастает примерно в три раза. Однако использование арочных подшипников при больших нагрузках практически неэффективно.

Кроме того, существующая в настоящее время технология профилирования таких дорожек качения весьма неэффективна. Достаточно сказать, что точность профиля дорожки качения в этом случае зависит не только от погрешностей оборудования, но и от точности установки колец, а также от точности смещения радиусов правящего органа относительно оси симметрии шлифовального круга.

Полые тела качения и кольца пониженной жесткости более чувствительны к колебаниям нагрузки, чем обычные. Поэтому при изменении нагрузки в ту или иную сторону величина зазора между контактирующими телами, а, следовательно, и размеры пятна контакта будут точнее реагировать на эти изменения. Таким образом, нагрузка на контакте будет всякий раз распределяться более благоприятно. Однако следует заметить, что кольца пониженной жесткости, как и полые тела качения, весьма сложны с точки зрения технологии их изготовления.

Наиболее распространенным профилем желоба является профиль, очерченный дугой окружности, благодаря относительной его простоте изготовления в технологическом отношении. Однако легко заметить, что увеличение радиуса желоба с целью снижения потерь на трение сопровождается уменьшением размеров площадки контакта, увеличением контактных давлений и, наоборот, уменьшение радиуса желоба увеличивает размеры пятна контакта, снижает контактные давления, но резко увеличивает потери на трение. Удовлетворение же обоих требований, т.е. снижение контактных давлений с одновременным снижением потерь на трение, относится к задачам столь же сложным, насколько и актуальным.

Решить указанную задачу можно за счет оптимизации формы контактирующих поверхностей опор качения. В частности, в работах М.В. Коровчинского [20], А.В. Орлова [21-23 и др.] и С.В. Пинегина [24-29] убедительно показано, что оптимизация геометрической формы рабочих поверх-

ностей подшипников качения существенно увеличивает их работоспособность. Этими авторами предложено несколько новых конструкций подшипников качения, проведены теоретические и экспериментальные исследования, которые убедительно показали возможность повышения статической и динамической грузоподъемности подшипников качения, снижения их момента трения, повышения быстроходности.

Например, в работах [21-23] показано, что, профилируя беговую дорожку шарикоподшипника дугой эллипса либо придавая ей гиперболическую форму, можно существенно улучшить такие важнейшие характеристики опорного узла, как легкость хода, его грузоподъемность. На рис. 1.3 показаны контактные давления при сжатии шара диаметром 50,8мм с круговым (1) и эллиптическим (2) желобом (сталь-сталь).

Как видно из рисунка, величина среднего давления на эллиптическом желобе при малых нагрузках меньше, а при более высоких - несколько больше среднего давления на круговом желобе, что объясняется ограниченной возможностью роста площадки контакта шара с эллиптическим желобом в длину при увеличении нагрузки вследствие быстрого возрастания функции зазора на некотором удалении от середины желоба.

В тех же работах указано, что в ряде случаев оказывается желательной возможность более свободного варьирования формой поверхности качения с целью получения наиболее благоприятной (для заданных условий эксплуатации) формы площадки контакта и закона распределения на ней нагрузки. Однако задача отыскания площадки контакта и распределение по ней эпюры напряжений является довольно сложной задачей, которая сопряжена с рядом трудностей математического характера.

М.В. Коровчинский [20] уточнил решение Г. Герца и дал приближенное решение близкого касания сжимаемых тел при достижении размеров площадки контакта, соизмеримой с размерами контактирующих тел. Несмотря на прикладную ценность этого решения, все же оно ограничивает возможность анализа работоспособности тел сложной формы. Поэтому А.В. Орлов и С.В. Пинегин в основном ограничивались экспериментальными исследованиями.

Выполненный анализ показывает, что форма контактирующих поверхностей упругих тел оказывает существенное влияние на параметры контакта, что может использоваться на практике для повышения работоспособности деталей машин и механизмов. Анализ этих условий свидетельствует о том, что тороидальная форма желоба не является оптимальной ни с точки зрения долговечности, ни с точки зрения энергетических потерь. Разработанные в настоящее время опоры качения с оптимальной геометрической формой хотя и обеспечивают существенное повышение работоспо-

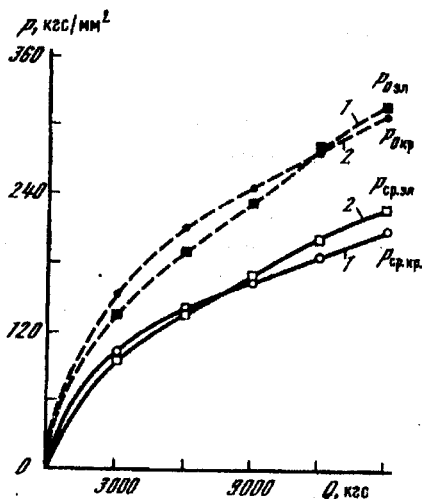


Рис. 1.3. Контактные давления при сжатии шара диаметром 50,8мм с круговым (1) и эллиптическим (2) желобом (сталь-сталь).

способности подшипников, но чрезвычайно сложны в изготовлении, что ограничивает их применение.

В связи с этим, наряду с использованием современных методов повышения работоспособности деталей шарикоподшипников, с особой остротой встает задача развития таких направлений совершенствования геометрической формы рабочих поверхностей опор качения, которые одновременно обеспечивали бы благоприятное распределение контактных напряжений и достаточную простоту их изготовления. Попытки совершенствовать геометрическую форму контактирующих поверхностей без решения технологических проблем обеспечения изготовления этой формы деталей не приводят к успеху. Поэтому задачу оптимизации геометрической формы рабочих поверхностей деталей необходимо решать в комплексе с решением соответствующих технологических задач.

Наиболее эффективно решить эту задачу возможно на основе дальнейшего развития теории локального упругого контакта тел сложной формы. Это, в частности, относится к случаю контакта, когда в одном из главных направлений тела имеют круговую форму, а в другом главном сечении они оба или одно из них имеет форму, отличную от круговой. Достаточно полное решение этой проблемы могло бы найти практическое применение

в совершенствовании конструкции не только подшипников качения, но и подшипников скольжения, зубчатых, винтовых передач, шлицевых соединений и т.д.

1.1.2. Основные направления совершенствования технологии шлифования рабочих поверхностей опор качения сложной формы

Серьезной проблемой на пути совершенствования геометрической формы рабочих поверхностей опор качения стоит разработка ее технологического обеспечения. Известно, что эксплуатационные свойства изделий типа подшипников качения (износостойкость, долговечность, надежность и др.) во многом зависят от технологического процесса изготовления отдельных деталей, который определяет геометрические и физико-химические параметры поверхностного слоя: точность размеров, формы, шероховатость поверхности, ее топографию, твердость [30-38 и др.]. К технологическим процессам изготовления этих деталей предъявляются высокие требования: наследование лучших точностных параметров и показателей качества поверхности и поверхностного слоя предшествующих технологических операций, возможность исправлять погрешности размеров, формы, обеспечивать достижение заданной шероховатости поверхности и качественных показателей поверхностного слоя деталей, обеспечение высокой культуры производства и техники безопасности, высокая производительность, простота наладки и обслуживания технологического оборудования, возможность автоматизации процесса и др.

Значительное влияние на эксплуатационные свойства подшипников оказывает шероховатость рабочих поверхностей деталей [39-42 и др.], волнистость и другие отклонения от круглости деталей [37, 39, 44-53 и др.], геометрическая форма профиля рабочих поверхностей деталей [19, 22, 54-67 и др.], обеспечиваемые на операциях шлифования и суперфиниширования. Оптимальное значение шероховатости желобов колец шарикоподшипников составляет $R_a=0,080-0,050$ мкм, а оптимальное значение шероховатости дорожек качения колец роликоподшипников составляет $R_a=0,16-0,32$ мкм [30, 39, 68 и др.]. При более высоких значениях шероховатости существенно уменьшается долговечность подшипников, а при более низких - резко снижается производительность процесса обработки.

Волнистость поверхности наиболее существенно влияет на уровень вибрации подшипников [35, 53 и др.] и является одним из наиболее важных суммарных показателей качества подшипников качения, характеризующих точность их изготовления и эксплуатационные характеристики.

Считается рациональной величина волнистости в пределах 0,10-0,05 мкм.

Придание рабочим поверхностям колец роликоподшипников выпуклости в пределах 2-4 мкм в несколько раз повышает их долговечность [41, 58, 68]. А так как величина этой выпуклости невелика, то весьма остро встает проблема ее обеспечения на операциях окончательной обработки, так как на предшествующей шлифовальной операции это сделать технологически сложно.

На современном этапе развития машиностроения разработано много методов окончательной обработки криволинейных поверхностей вращения деталей машин, которые отличаются схемой обработки, режимами и видами режущего инструмента. Среди этих методов наиболее широкое применение нашли шлифование [19, 39, 40, 69-76 и др.], притирка и полирование [77-80 и др.], микрохонингование [68 и др.] и суперфиниширование.

В настоящее время заданные размеры и форму упрочненных поверхностей деталей обеспечивают на операциях шлифования. При изготовлении колец подшипников значительная роль отводится операциям шлифования дорожек качения [77], на которых достигается требуемая точность дорожек, а, следовательно, и подшипника в целом. Это и предопределяет относительно высокую трудоемкость операций шлифования.

В настоящее время в подшипниковой промышленности применяется несколько способов шлифования дорожек качения. При обработке рабочих поверхностей опор качения обычно применяют процесс шлифования периферией шлифовального круга методом врезания. Периферии круга с помощью правящего инструмента придают заданную форму, которая затем копируется на обрабатываемой поверхности [81-86 и др.].

Методом врезания достигается более высокая геометрическая стабильность параметров профиля дорожки качения, более высокая геометрическая точность осевого биения дорожки качения и базового торца по сравнению с другими методами. Кроме того, все более широкому внедрению метода врезного шлифования способствовали такие немаловажные его преимущества, как простота наладки, которая сводится к настройке величины радиуса, положения и размера дорожки качения; более стабильный размер диаметров дорожек качения; постоянство размера радиуса даже при многократном шлифовании.

Однако этот метод не лишен серьезных недостатков:

1. Низкая степень самозатачиваивания шлифовального круга приводят к тому, что последний быстро "засаливается". Поэтому требуется частая правка круга, в связи с чем наблюдается повышенный расход кругов и правящего инструмента.

2. Неравномерный износ шлифовального круга из-за неравенства ок-

ружностей различных точек периферии круга [90,91 и др.]. Это положение ухудшается еще и тем, что любые отклонения в заготовке кольца (смещение оси, отклонение по величине радиуса профиля и т.д.) ведут к тому, что по краям круга возрастает износ, приводящий в дальнейшем к искажению профиля шлифуемой детали. Поэтому при шлифовании методом врезания для стабилизации шлифуемых профилей необходимо применение более твердых абразивных кругов, что также снижает производительность, так как опасность ожогов вынуждает снижать поперечную подачу.

3. При правке круга алмазным карандашом с высокой точностью можно получать профили заготовок простой формы - круговой или линейной. В этом случае погрешность профиля зависит в основном только от траектории перемещения инструмента, которая обеспечивается простыми техническими средствами. При шлифовании поверхностей деталей сложной формы правка шлифовального круга алмазным карандашом осуществляется по копиру, а это из-за сложности правящего устройства приводит к значительным погрешностям формы.

4. При правке кругов сложного профиля применяют алмазные правящие ролики [87 и др]. Однако правка круга алмазными роликами ограничивается их высокой стоимостью, и поэтому этот метод правки используется только в крупносерийном и массовом производствах.

С другой стороны, более интенсивный износ абразивных зерен при врезном шлифовании, истирание их режущих граней и увеличение радиуса округления вершин зерен приводят к снижению шероховатости [72, 81, 82]. Кроме того, более низкий уровень вибраций в системе СПИД из-за отсутствия дополнительного качательного движения бабки изделия также благотворно влияет на шероховатость шлифованной поверхности, так как снижение уровня вибрации системы СПИД эквивалентно снижению разности высотности активных зерен [72]. Поэтому в последнее время метод врезания, обеспечивающий большую точность обработки и простоту наладки металлорежущего оборудования, находит все более широкое применение в подшипниковой промышленности.

Наиболее высокую точность формы заготовок сложного профиля можно обеспечить совершенствованием кинематики процесса шлифования. В работах [88,89], например, приведена классификация относительных движений заготовки и инструмента простой формы, которая обеспечивает обработку поверхностей заданной сложной формы. На наш взгляд, это направление поиска способов формирования поверхностей сложной формы наиболее перспективно, так как обеспечивает высокую точность простыми средствами.

Перспективы применения данного метода обработки становятся еще более значительными в условиях оптимизации рабочих поверхностей шарикоподшипников. Предложенные в работе [22] конструкции желобов колец шарикоподшипников потребовали создания технологических средств для их воплощения. Придание инструменту необходимой формы ведется с помощью профильного инструмента либо шаблона [21, 22]. При этом погрешность формы последних полностью переносится на профиль изделия, что в значительной мере снижает ожидаемую эффективность. Применение пантографных механизмов из-за их громоздкости и чувствительности к люфтам в многочисленных шарнирах еще более неэффективно.

Рассмотренный выше комбинированный профиль можно получить, используя шаблоны, пантографные механизмы, а также ведя обработку по элементам образующей профиля. Например, дугу, с радиусом, близким к радиусу шара, профилировать на одном станке, а сопряженные с ней касательные - на другом. Но и здесь остается проблематичной возможность доводочной операции полученного профиля желоба, а, следовательно, невысокая точность.

Для правки шлифовального круга по дуге эллипса иногда используют устройства типа эллипсограф, которые дают значительную погрешность формы из-за их многозначности. Поэтому должного применения эти механизмы для правки шлифовальных кругов не получили. Дальнейшие работы в этом направлении привели к тому, что в Институте точного машиностроения Академии наук РФ были разработаны специальные приспособления, конструкция которых для желоба эллиптического профиля представлена на рис. 1.4 [21].

Шлифовальный круг 1, вращающийся вокруг оси $O_1 - O_1$, профилируется алмазной иглой 2, установленной в скобе 3, которая покачивается вокруг оси приспособления $O_2 - O_2$. Эта ось развернута относительно плоскости вращения шлифовального круга на угол φ . Таким образом, при вращении скобы острие иглы описывает в плоскости NN окружность радиусом, равным R_3 . Следовательно, если спроектировать дугу окружности радиуса R_3 , лежащую в плоскости NN , на диаметральной плоскости шлифовального круга TT , то получим на его периферии дугу эллипса 4 с полуосями $a = R_3$ и $b = R_3 \cos \varphi$. Для этого, кроме вращательного движения скобы 3, в результате которого острие иглы в какой-то момент времени получит в направлении NN перемещение S , необходимо площадке 5, на которой смонтирована скоба, сообщить дополнительное поступательное перемещение $S_0 = -S \sin \varphi$ с таким расчетом, чтобы игла все время располагалась в диаметральной плоскости TT .

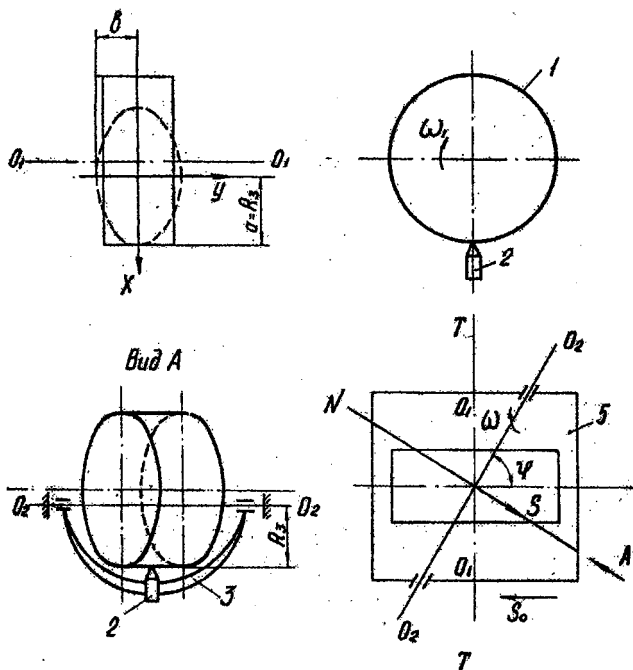


Рис. 1.4. Приспособление для получения эллиптического профиля желоба

Аналогичное приспособление было разработано и для гиперболического профиля желоба. Особенностью этих приспособлений является наличие у них двух взаимосвязанных движений правящей головки: вращательного и корректирующего, что является нежелательным при профилировании таких ответственных поверхностей, как дорожки качения шарикоподшипников.

Еще более значительные трудности вызывает обработка желоба сложного профиля, когда средняя часть профиля колец представляет собой участок постоянной кривизны, а периферийные участки — сопряженные с центральным участком дуги переменной кривизны. Обеспечить необходимую точность профиля с таким сложным сочетанием кривых и имеющего две точки перегиба существующими технологическими средствами не представляется возможным.

Подводя итог, можно сделать вывод о том, что формирование профилей желобов шарикоподшипников осуществляется главным образом на стадии шлифования. При этом используются, как правило, два основных

метода шлифования фасонных поверхностей: профилированным шлифовальным кругом врезанием по методу копирования и по методу кинематического воспроизведения поверхности заготовки сложной формы шлифовальным кругом простой формы. Предложенные в работе [21,22] конструкции желобов колец шарикоподшипников не получили широкого распространения не только из-за отсутствия соответствующей теоретической базы для целенаправленного анализа параметров контакта поверхностей дорожек и тел качения, но и потому, что в настоящее время нет достаточно точных и экономически целесообразных методов профилирования шлифовальных кругов. Кинематическое же воспроизведение предложенных профилей желобов, очевидно, еще более затруднительно, так как потребует коренной модернизации существующего станочного парка.

Как отмечалось выше, процесс шлифования имеет определенные недостатки, которые не позволяют его использовать для окончательной обработки ответственных поверхностей деталей, какими являются рабочие поверхности опор качения. При любых способах шлифования погрешность формы обрабатываемой заготовки обусловлена неравномерным износом инструмента [90,91 и др.]. Поэтому для достижения высокой точности профиля заготовки необходимо часто править шлифовальный круг, что повышает стоимость операции.

Кроме того, в процессе шлифования развиваются высокие температуры, вызывающие неблагоприятные структурные превращения в поверхностном слое шлифуемой поверхности [33, 92-95]. При шлифовании также сложно обеспечить требуемые для прецизионных изделий типа колец подшипников качения значения шероховатости и волнистости поверхности [41 и др.].

Поэтому для достижения высоких значений показателей точности и качества обработки поверхностей сложной формы необходимо, помимо шлифования, вводить в технологический процесс дополнительные операции сверхтонкой прецизионной обработки, типа профилирующего суперфиниширования или размерной электрохимической обработки. Однако окончательная обработка таких поверхностей на практике вызывает серьезные трудности.

ГЛАВА 2. МЕХАНИКА УПРУГОГО КОНТАКТА ТЕЛ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

2.1. Математическая модель упругого контакта тел сложной формы

Рассмотрим контакт двух упругих тел сложной формы под воздействием нормальной нагрузки P . Будем полагать, что при отсутствии нормальной нагрузки тела имеют первоначальный точечный контакт. Выберем эту точку за начало декартовых координат (рис.2.1).

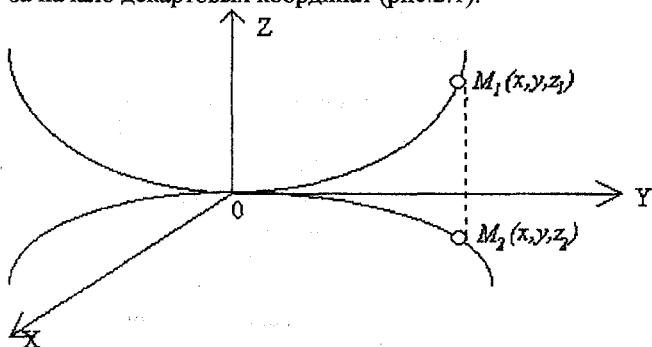


Рис.2.1. Первоначальный контакт гладких тел

Оси XOY лежат в общей касательной плоскости, а ось Z направляют через точку O перпендикулярно этой плоскости вовнутрь одного из контактирующих тел. Берутся две точки $M_1(x, y, z_1)$ и $M_2(x, y, z_2)$, принадлежащие соответственно первому и второму контактирующим телам, лежащие на одной нормали к касательной плоскости. И считается, что первоначальное расстояние между смежными точками контактирующих тел равно:

$$z_1 - z_2 = Ay^n + Bx^m. \quad (2.1)$$

После того, как точки тел под воздействием внешней нормальной нагрузки совместятся, будет выполняться следующее условие:

$$w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0) = \delta - (z_1 - z_2) = \delta - Ay^n - Bx^m, \quad (2.2)$$

где $w_1(x, y, z)$ и $w_2(x, y, z)$ - деформация точек соответственно первого и второго контактирующего тела;

δ - сближение тел под воздействием нормальной нагрузки.

С другой стороны, как уже отмечалось выше, если обозначить через $q(x, y)$ напряжение в точке (x, y) на площадке контакта, то вертикальное

перемещение в этой точке можно найти из выражения:

$$w(x, y, 0) = \left(\frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{q(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}, \quad (2.3)$$

где S - эллиптическая площадка контакта:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (2.4)$$

$w(x, y, 0)$ - сближение смежных точек тел с координатами (x, y) , равно

$$w(x, y, 0) = w_1(x, y, 0) + w_2(x, y, 0).$$

Рассмотрим промежуточный контакт этих тел под некоторой промежуточной нормальной нагрузкой Q . Обозначим малую и большую полуоси эллиптической площадки контакта, возникшей под нагрузкой Q , соответственно через a_Q и b_Q . Дадим приращение внешней нагрузки dQ и будем предполагать поочередно, что при этой элементарной нагрузке одно из контактирующих тел является плоским эллиптическим в плане штампом, а другое - упругим полупространством.

Как известно, напряжение, возникающее на площадке контакта от воздействия плоского эллиптического в плане штампа, имеет вид:

$$q(x, y) = \frac{Q}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2} - \frac{y^2}{b_Q^2}}}. \quad (2.5)$$

Величину вдавливания штампа в полупространство определим из известного выражения:

$$\delta_Q = \frac{\nu_0}{b_Q} K(e) \cdot Q, \quad (2.6)$$

где e - эксцентриситет эллипса контакта;

$K(e)$ - эллиптический интеграл первого рода.

Пользуясь выражениями (2.5) и (2.6) и считая поочередно одно тело плоским эллиптическим в плане штампом, а другое упругим полупространством, можно определить сближение упругих тел под воздействием внешней элементарной сжимающей нагрузки dQ , действующей на контактирующие упругие тела:

$$d\delta = \frac{\nu_0}{b_Q} K(e_Q) dQ, \quad (2.7)$$

где

$$\nu_0 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2}, \quad (2.8)$$

$$q_Q(x, y) = \frac{dQ}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2} - \frac{y^2}{b_Q^2}}}$$

На основе равенств (1.3), (2.7) и (2.8) определим вертикальное перемещение точек контактирующих тел с координатами (x, y) от элементарной нагрузки dQ :

$$dw(x, y, z) = v_0 \frac{dQ}{2\pi a_Q b_Q} \iint_{S_Q} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a_Q^2} - \frac{\eta^2}{b_Q^2}} \cdot \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}, \quad (2.9)$$

где S_Q - площадка контакта упругих тел под промежуточной нагрузкой Q .

Полное перемещение точек контактирующих тел с координатами (x, y) найдем интегрированием выражения (2.9) по нагрузке dQ в пределах от нуля до P :

$$w(x, y, 0) = v_0 \int_0^P \frac{1}{2\pi a_Q b_Q} \iint_{S_Q} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a_Q^2} - \frac{\eta^2}{b_Q^2}} \cdot \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} dQ. \quad (2.10)$$

Равенство (2.10) существенно упрощается при $x = 0$ и $y = 0$, соответствующих центру площадки контакта. Перемещение тел в центре площадки контакта под нагрузкой P равно:

$$\delta = v_0 \int_0^P \frac{K(e_Q)}{b_Q} dQ. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.10) найдем также перемещение точек под нагрузкой P в точках (x_p, y_p) , являющихся граничными точками площадки контакта. Для этого введем полярную систему координат. Начало полярной системы координат возьмем в точке (x_p, y_p) , начало отсчета полярного угла - от направления, совпадающего с направлением оси OX (рис. 2.2). Ось OX направлена вдоль малой площадки контакта, ось OY - вдоль большой площадки контакта. На рис. 2.2. a и b - конечные значения размеров малой и большой полуосей площадки контакта, a_Q и b_Q - текущие значения.

Тогда координаты точек профиля площадки контакта с осями a_Q и b_Q будут равны:

$$\begin{cases} \xi = x_p + l \cos \beta \\ \eta = y_p + l \sin \beta \end{cases}$$

где l - полярный радиус профиля площадки контакта; β - полярный угол.

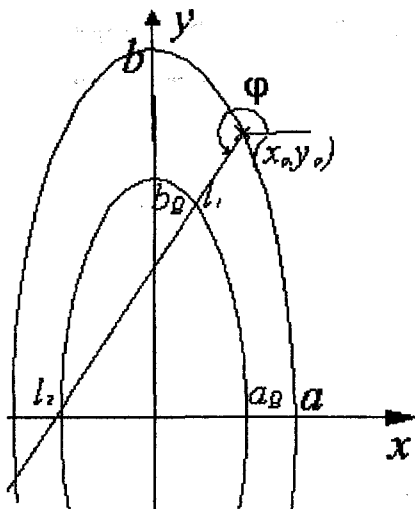


Рис. 2.2. Ввод полярной системы координат

В полярной системе координат выражение (34) примет вид:

$$w(x_p, y_p) = v_0 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \int_{l_1(\beta)}^{l_2(\beta)} \frac{dl d\beta dQ}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - \left(\frac{x_p + l \cos \beta}{a_Q}\right)^2 - \left(\frac{y_p + l \sin \beta}{b_Q}\right)^2}}. \quad (2.12)$$

Определим границы внутреннего интеграла $l_1(\beta)$ и $l_2(\beta)$. Для этого разрешим уравнение:

$$1 - \left(\frac{x_p + l \cos \beta}{a_Q}\right)^2 - \left(\frac{y_p + l \sin \beta}{b_Q}\right)^2 = 0$$

относительно l .

Предварительно сделаем для удобства замену: $\varphi = \beta + \pi$. Данное уравнение в этом случае переписывается в виде:

$$1 - \left(\frac{x_p - l \cos \varphi}{a_Q}\right)^2 - \left(\frac{y_p - l \sin \varphi}{b_Q}\right)^2 = 0. \quad (2.13)$$

Корни уравнения (2.13):

$$l_{1,2}(\varphi) = \frac{1}{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi} \left[b_Q^2 x_p \cos \varphi + a_Q^2 y_p \sin \varphi \pm \right]$$

$$\pm a_Q b_Q \sqrt{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi - (x_p \sin \varphi - y_p \cos \varphi)^2} \quad (2.14)$$

Следовательно, внутренний интеграл в выражении (2.12) преобразуется в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{l_1(\varphi)}^{l_2(\varphi)} \frac{dl}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{1 - \left(\frac{x_p - l \cos \varphi}{a_Q}\right)^2 - \left(\frac{y_p - l \sin \varphi}{b_Q}\right)^2}} = \\ & = \frac{\ln \left[- \left(a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi \right) \right] - \ln \left[a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi \right]}{2\pi a_Q b_Q \sqrt{\frac{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi}{a_Q^2 b_Q^2}}} = \\ & = \frac{\ln[-1]}{2\pi i \sqrt{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{i\pi}{2\pi i \sqrt{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi}} = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{a_Q^2 \sin^2 \varphi + b_Q^2 \cos^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

а выражение (2.12) примет вид:

$$w(x_p, y_p) = \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_1 - \pi} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{b_Q^2 \cos^2 \varphi + a_Q^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.15)$$

Краевое условие (2.2) с учетом (2.11) и (2.15) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \int_{\varphi_0 - \pi}^{\varphi_1 - \pi} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{b_Q^2 \cos^2 \varphi + a_Q^2 \sin^2 \varphi}} = \\ = A y_p^n + B x_p^m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Определим границы внутреннего интеграла в выражении (2.16). Очевидно, они должны зависеть от внешней нагрузки, так как под воздействием внешней нагрузки меняются размеры площадки контакта. Кроме того, границы внутреннего интеграла будут зависеть от положения точки (x_p, y_p) относительно площадки контакта S_Q . Легко можно заметить, что если через точку (x_p, y_p) провести касательные к эллипсу контакта, то искомыми пределами интегрирования - это угол наклона касательных к оси OX . Для простоты будем полагать, что точка (x_p, y_p) находится в первой четверти в выбранной системе координат.

На рис. 2.3, 2.4, 2.5 и 2.6 показаны различные случаи взаимного рас-

положения точки (x_p, y_p) и площадки S_Q , а также положение касательных, проведенных через эту точку к площадке контакта. Как можно заметить, имеются четыре варианта взаимного расположения точки и площадки:

$$y_p \leq b_Q; x_p > a_Q;$$

$$y_p \leq b_Q; x_p \leq a_Q;$$

$$y_p > b_Q; x_p > a_Q;$$

$$y_p > b_Q; x_p \leq a_Q.$$

Рассмотрим первый вариант: $y_p \leq b_Q; x_p > a_Q$ (рис.2.3). В этом случае, как можно видеть из рис.2.3, касательные проходят справа через верхнюю и нижнюю часть эллипса. Очевидно, угол φ_0 - это угол наклона касательной, проходящей к верхней части эллипса, которая имеет уравнение:

$$y = b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2}}. \quad (2.17)$$

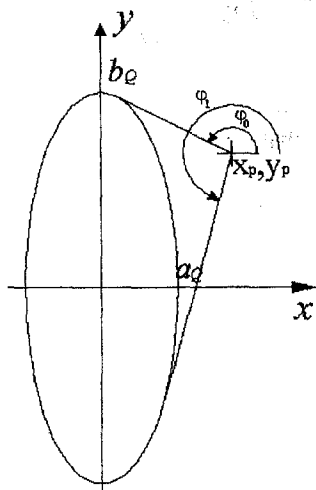


Рис.2.3. Взаимное расположение точки x_p, y_p и площадки контакта при $y_p \leq b_Q; x_p > a_Q$

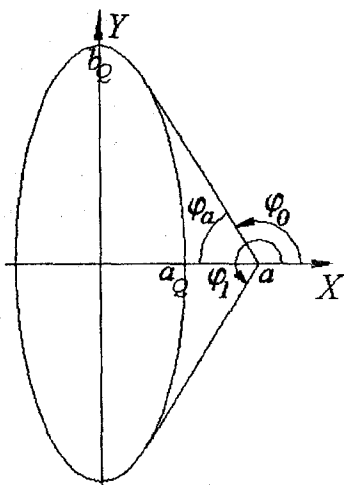


Рис.2.4. Положение касательных к эллипсу контакта при $x_p = a, y_p = 0$

Тогда уравнение касательной к этой части эллипса и проходящей через заданную точку (x_p, y_p) имеет вид:

$$y_p = -\frac{b_Q x}{a_Q \sqrt{a_Q^2 - x^2}} (x_p - x) + b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2}}, \quad (2.18)$$

разрешая которое относительно x , найдем координату точки касания:

$$x = \frac{a_Q^2}{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2} \left[b_Q^2 x_p \pm y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2} \right]. \quad (2.19)$$

Простой подстановкой можно убедиться, что удовлетворяет решению равенства (2.19) только один корень:

$$x = \frac{a_Q^2}{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2} \left[b_Q^2 x_p - y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2} \right]. \quad (2.20)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{b_Q x}{a_Q \sqrt{a_Q^2 - x^2}}, \quad (2.21)$$

то, подставляя (2.20) в (2.21), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-b_Q^2 x_p + y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}{\sqrt{(y_p^2 - b_Q^2) a_Q^2 x_p + x_p^4 b_Q^2 + a_Q^4 y_p^2 + 2 a_Q^2 x_p y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}}. \quad (2.22)$$

Обозначим размер малой и большой полуоси площадки контакта, возникшей под нагрузкой P , соответственно через a и b .

В дальнейшем нам понадобится особый случай, когда $y_p = 0$, $x_p = a$. В этом случае выражение (2.22) будет иметь вид:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-b_Q}{a \sqrt{1 - \frac{a_Q^2}{a^2}}}$$

или

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{-b_Q}{a \sqrt{1 - \frac{a_Q^2}{a^2}}} \right). \quad (2.23)$$

Определим угол φ_1 . Как видно из рис. 2.3, φ_1 - это угол наклона касательной, проходящей через нижнюю часть эллипса, уравнение которой имеет вид:

$$y = -b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2}}. \quad (2.24)$$

Тогда уравнение касательной к этой части эллипса, проходящей через заданную точку (x_p, y_p) , описывается следующим выражением:

$$y_p = \frac{b_Q x}{a_Q \sqrt{a_Q^2 - x^2}} (x_p - x) - b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2}}. \quad (2.25)$$

Разрешая это уравнение относительно x , по аналогии с равенством (2.16), получим выражение (2.19). Простой подстановкой можно убедиться, что решению полученного равенства удовлетворяет только один корень:

$$x = \frac{a_Q^2}{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2} \left[b_Q^2 x_p + y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2} \right]. \quad (2.26)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_Q x}{a_Q \sqrt{a_Q^2 - x^2}}, \quad (2.27)$$

то, подставляя (2.26) в (2.27), найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_Q^2 x_p + y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}{\sqrt{(y_p^2 - b_Q^2) a_Q^2 x_p + x_p^4 b_Q^2 + a_Q^4 y_p^2 - 2 a_Q^2 x_p y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}}. \quad (2.28)$$

При $y_p = 0$, $x_p = a$ выражение (2.28) будет иметь вид (рис.2.4):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_Q}{a \sqrt{1 - \frac{a_Q^2}{a^2}}}$$

или

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{b_Q}{a \sqrt{1 - \frac{a_Q^2}{a^2}}} \right). \quad (2.29)$$

Выразим угол φ_0 через φ_a :

$$\varphi_0 = \pi - \varphi_a.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\operatorname{tg} \varphi_a,$$

откуда

$$\varphi_a = \arctg \left(\frac{b_Q}{a \sqrt{1 - \frac{a_Q^2}{a^2}}} \right). \quad (2.30)$$

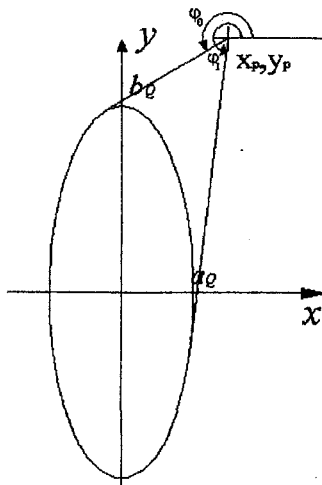


Рис.2.5. Взаимное расположение точки x_p, y_p и площадки контакта при $y_p > b_Q; x_p > a_Q$

Рассмотрим второй случай, когда $y_p \leq b_Q; x_p \leq a_Q$. В этом случае точка находится внутри площадки контакта, а следовательно, касательной к эллипсу в этом случае быть не может.

В случае $y_p > b_Q; x_p > a_Q$, как можно заметить из рис.2.5, касательные так же, как и в первом случае, проходят через верхнюю и нижнюю часть эллипса, а следовательно, углы наклона этих касательных определяются таким же образом, как и в первом случае.

И, наконец, в последнем случае, когда $y_p > b_Q; x_p \leq a_Q$, касательные проходят через верхнюю часть эллипса. Одна касательная проходит слева от оси эллипса, а другая - справа (рис.2.6). Так как уравнение эллипса для обеих касательных имеет вид (2.17), точки касательный определяются из выражения (2.19), а тангенсы угла наклона касательных имеют вид (2.21), то для определения угла φ_0 выберем наименьшее значение x в выражении (2.20) и подставим его в (2.21). Получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-b_Q^2 x_p + y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}{\sqrt{(y_p^2 - b_Q^2) a_Q^2 x_p + x_p^4 b_Q^2 + a_Q^4 y_p^2 + 2a_Q^2 x_p y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}}. \quad (2.31)$$

Для определения угла φ_1 выберем наибольшее значение числа x из выражения (2.20) и подставим в (2.21). После преобразования получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-b_Q^2 x_p - y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}{\sqrt{(y_p^2 - b_Q^2) a_Q^2 x_p + x_p^4 b_Q^2 + a_Q^4 y_p^2 - 2a_Q^2 x_p y_p \sqrt{a_Q^2 y_p^2 + x_p^2 b_Q^2 - a_Q^2 b_Q^2}}}. \quad (2.32)$$

В частности, если $y_p = b$, а $x_p = 0$ (рис.2.7), выражения (2.21) и (2.22) примут соответственно вид:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{b}{a_Q} \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b}{a_Q} \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}}$$

или

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a_Q} \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}} \right); \quad (2.33)$$

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a_Q} \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}} \right). \quad (2.34)$$

Как видно из рис.2.7, угол φ_b связан с углом φ_0 соотношением:

$$\varphi_b = \frac{3}{2} \pi - \varphi_0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi_b = \operatorname{ctg}\varphi_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_b = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_Q}{b \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}}} \right). \quad (2.35)$$

Таким образом, внутренние пределы интегрирования в выражении (2.16) определяются с помощью выражений (2.22), (2.28) или (2.23) и (2.29), в зависимости от текущего взаимного расположения точки и эллипса контакта.

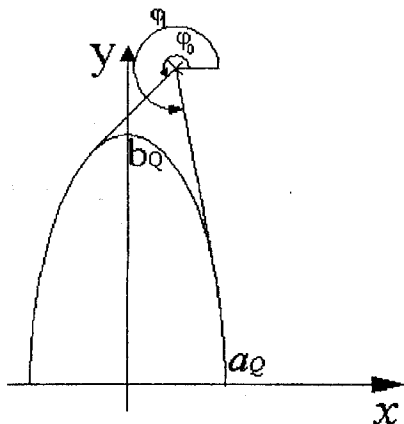


Рис.2.6. Взаимное расположение точки x_p, y_p и площадки контакта при $y_p > b_Q; x_p \leq a_Q$

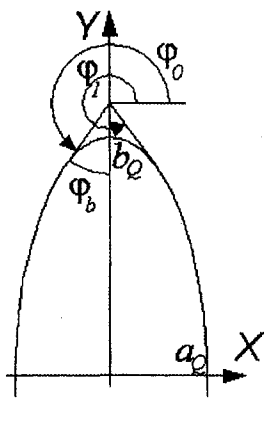


Рис.2.7. Положение касательных к эллипсу контакта при $x_p = 0; y_p = b$

В дальнейшем из краевого условия (2.16) определим размеры площадки контакта a и b , а также величину сближения упругих тел δ , возникающие под действием внешней нормальной нагрузки P .

Для этого вначале запишем краевое условие (2.16) для двух особых случаев, когда $x_p = a, y_p = 0$ (рис.2.4) и когда $x_p = 0, y_p = b$ (рис.2.7).

В случае, если $x_p = a, y_p = 0$, делаем замену переменной во втором слагаемом (2.16):

$$\alpha = \pi - \varphi.$$

Заметив из рис.2.4, что $\varphi_a = \pi - \varphi_0$, а также, что $\varphi_0 = -\varphi_1$, и следовательно, $\varphi_a = \pi + \varphi_1$, подставляя все это во второе слагаемое выражения (2.16), получим:

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\pi - \varphi_a}^{\pi + \varphi_a} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \alpha}} = Ba^m, \quad (2.16')$$

где a - размер малой полуоси эллипса контакта, возникающий под нагрузкой P ;

φ_a определяется из выражения (2.30).

Так как внутренний интеграл во втором слагаемом последнего выражения можно представить в виде:

$$\int_{\pi-\varphi_a}^{\pi+\varphi_a} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \alpha}} = \int_{\pi-\varphi_a}^{\pi} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \alpha}} + \int_{\pi}^{\pi+\varphi_a} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \alpha}},$$

то делая еще раз замену переменной интегрирования: $\varphi = \alpha - \pi$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\pi-\varphi_a}^{\pi+\varphi_a} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \alpha}} &= \int_{-\varphi_a}^0 \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= 2 \cdot \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Таким образом, краевое условие (2.16') можно записать:

$$\nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ba^m. \quad (2.36)$$

Рассмотрим случай, когда $x_p = 0$, $y_p = b$. Из рис.2.7 видно, что $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi - \varphi_b$, а также, что $\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi + \varphi_b$. Используя эти соотношения и равенство (2.16), получим:

$$\nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi_b}^{\frac{\pi}{2}+\varphi_b} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n,$$

где φ_b - угол, который определяется из выражения (2.35).

Делая замену:

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

получим:

$$\nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \nu_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{-\varphi_b}^{\varphi_b} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \cos^2 \alpha}} = Ab^n.$$

Так как:

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_b}^{\varphi_b} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \cos^2 \alpha}} &= \int_{-\varphi_b}^0 \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \cos^2 \alpha}} + \int_0^{\varphi_b} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \cos^2 \alpha}} = \\ &= 2 \int_0^{\varphi_b} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1-e_Q^2 \cos^2 \alpha}}, \end{aligned}$$

то краевое условие (2.16) можно переписать следующим образом:

$$v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\varphi_b} \frac{d\alpha dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \cos^2 \alpha}} = Ab^n.$$

Для того, чтобы подынтегральные функции имели одинаковый вид, выполним еще раз замену: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда последнее выражение запишется в виде:

$$\begin{aligned} v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} - v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_{\frac{\pi}{2} - \varphi_b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} &= \\ &= v_0 \int_0^P \frac{1}{b_Q} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi_b} \frac{d\varphi dQ}{\sqrt{1 - e_Q^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Далее сделаем предположение, что размер площадки контакта связан с внешней текущей нагрузкой Q следующей зависимостью:

$$\begin{cases} a_Q = uQ^h \\ b_Q = kQ^t \end{cases}, \quad (2.38)$$

в частности,

$$\begin{cases} a = uP^h \\ b = kP^t \end{cases}. \quad (2.39)$$

Введем новое обозначение:

$$s = \frac{b_Q}{b}. \quad (2.40)$$

Из равенства (2.40) с учетом выражений (2.38) и (2.39) следует:

$$s = \left(\frac{Q}{P}\right)^t; \quad Q = P \cdot s^{\frac{1}{t}}; \quad dQ = P \cdot \frac{1}{t} \cdot s^{\frac{1}{t}-1} ds. \quad (2.41)$$

Тогда (2.38) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} a_s = uP^h s^{\frac{h}{t}} = a \cdot s^{\frac{h}{t}} \\ b_s = kP^t s = b \cdot s \end{cases}. \quad (2.42)$$

Эксцентриситет эллипса контакта под текущей нагрузкой Q можно найти в таком случае из выражения:

$$e_S = \sqrt{1 - \frac{a_S^2}{b_S^2}} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} s^{2\left(\frac{h-1}{t}\right)}} = \sqrt{1 - (1 - e^2) s^{2\left(\frac{h-1}{t}\right)}}, \quad (2.43)$$

где e - эксцентриситет площадки под нагрузкой P .

Из (2.43) можно заметить, что величина e_S не зависит от s тогда и только тогда, когда $h = t$. В противном случае эксцентриситет площадки зависит от внешней нагрузки.

С учетом обозначений (2.41) и (2.42) перепишем краевые условия (3.36) и (2.37) в следующем виде:

$$\frac{Pv_0}{b \cdot t} \int_0^1 s^t \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1 - e_S^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1 - e_S^2 \sin^2 \varphi}} \right) = Ba^m; \quad (2.44)$$

$$\frac{Pv_0}{b \cdot t} \int_0^1 s^t \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi_b} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1 - e_S^2 \sin^2 \varphi}} = Ab^n.$$

Из второго выражения (2.44):

$$P^{n+1} \left(\frac{v_0}{A \cdot t} \int_0^1 s^t \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi_b} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1 - e_S^2 \sin^2 \varphi}} \right)^{\frac{1}{n+1}} = b. \quad (2.45)$$

Сравнивая выражения (2.39) и (2.45) при степенях P , получим:

$$t = \frac{1}{n+1}. \quad (2.46)$$

Тогда пределы интегрирования φ_a и φ_b будут иметь вид:

$$\varphi_a(s, e, h) = \operatorname{arctg} \left(\frac{b_S}{a \sqrt{1 - \frac{a_S^2}{a^2}}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - s^{2h(n+1)}}} \right); \quad (2.47)$$

$$\varphi_b(s, e, h) = \operatorname{arctg} \left(\frac{a_Q}{b \sqrt{1 - \frac{b_Q^2}{b^2}}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - e^2} s^{h(n+1)}}{\sqrt{1 - s^2}} \right).$$

Обозначим интегралы в выражениях (2.44):

$$J_0(e) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (2.48)$$

$$J_a(e, h) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\varphi_a(s, e, h)} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$J_b(e, h) = \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi_b(s, e, h)} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Тогда с учетом обозначений (2.48) и выражения (2.46), равенства (2.44) можно записать в виде:

$$\frac{Pv_0(n+1)}{b} (J_0(e) - J_a(e, h)) = Ba^m; \quad (2.49)$$

$$P^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{v_0(n+1)}{A} J_b(e, h) \right)^{\frac{1}{n+1}} = b.$$

Подставляя второе выражение в первое, получим:

$$a = \left(\frac{Pv_0(J_0(e) - J_a(e, h))A^{\frac{1}{n+1}}(n+1)}{[Pv_0(n+1)J_b(e, h)]^{\frac{1}{n+1}}B} \right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= P^{\frac{n}{m(n+1)}} \left(\frac{v_0(J_0(e) - J_a(e, h))A^{\frac{1}{n+1}}(n+1)}{[v_0(n+1)J_b(e, h)]^{\frac{1}{n+1}}B} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (2.50)$$

Сравнивая в выражениях (2.39) и (2.50) степени у P , получаем:

$$h = \frac{n}{m(n+1)}. \quad (2.51)$$

Таким образом, выражения (2.47) будут иметь вид:

$$\varphi_a(s, e) = \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{\sqrt{1-e^2} \sqrt{1-s^{\frac{2n}{m}}}} \right); \quad (2.52)$$

$$\varphi_b(s, e) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} s^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{1-s^2}} \right).$$

Эксцентриситет эллипса контакта, как следует из (2.43), в зависимости от текущей нагрузки будет выражаться зависимостью:

$$e_S = \sqrt{1 - \left(1 - e^2\right) s^{2\left(\frac{n-1}{m}\right)}}. \quad (2.53)$$

Следовательно, эксцентриситет эллипса контакта не будет зависеть от внешней нагрузки только в случае, если $n = m$.

Кроме того, интегралы в (2.48) будут зависеть только от величины e . Поэтому мы их будем обозначать дальше соответственно через $J_0(e)$, $J_a(e)$, $J_b(e)$.

Тогда выражения для определения размеров площадки будут иметь вид:

$$a = P^{\frac{n}{m(n+1)}} \left(\frac{v_0(J_0(e) - J_a(e)) A^{\frac{1}{n+1}}(n+1)}{[v_0(n+1)J_b(e)]^{\frac{1}{n+1}} B} \right)^{\frac{1}{m}}; \quad (2.54)$$

$$b = P^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{v_0(n+1)}{A} J_b(e) \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Разделим первое выражение в (2.54) на второе. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= P^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \left(\frac{v_0(J_0(e) - J_a(e)) A^{\frac{1}{n+1}}(n+1)}{[v_0(n+1)J_b(e)]^{\frac{1}{n+1}} B} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{A^{\frac{1}{n+1}}}{[v_0(n+1)J_b(e)]^{\frac{1}{n+1}}} = \\ &= P^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \cdot [v_0(n+1)]^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \cdot \frac{A^{\frac{m+1}{m(n+1)}}}{B^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{(J_0(e) - J_a(e))^{\frac{1}{m}}}{J_b(e)^{\frac{m+1}{m(n+1)}}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

С другой стороны, известно, что

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.56)$$

Приравнявая правые части выражений (2.54) и (2.56), получим:

$$\sqrt{1 - e^2} = P^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \cdot [v_0(n+1)]^{\frac{n-m}{m(n+1)}} \cdot \frac{A^{\frac{m+1}{m(n+1)}}}{B^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{(J_0(e) - J_a(e))^{\frac{1}{m}}}{J_b(e)^{\frac{m+1}{m(n+1)}}} \quad (2.57)$$

Выражение (2.57) является исходным уравнением, из которого можно найти эксцентриситет площадки контакта. Затем из второго выражения

(2.54) несложно определить размер большой полуоси площадки контакта, а из выражения (2.56) можно найти малую полуось эллипса.

В частности, если $n = m$, выражение (2.57) для определения эксцентриситета запишется в виде:

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{A^{\frac{1}{n}}}{B^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{(J_0(e) - J_a(e))^{\frac{1}{n}}}{J_b(e)^{\frac{1}{n}}}, \quad (2.58)$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в работе [19].

Сравним полученные результаты с известными формулами Герца, где $n = m = 2$. Как следует из второго выражения (2.54),

$$b = \sqrt[3]{P \frac{3 \cdot v_0}{2A} 2J_b(e)}. \quad (2.59)$$

Выразим интегралы $J_b(e)$ через известные эллиптические интегралы первого и второго рода. Как следует из (2.48) и (2.52), в данном случае

$$J_b(e) = \int_0^1 s \int_0^{\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.60)$$

Вычислим интеграл (2.60) используя правило интегрирование по частям. Для этого обозначим:

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad dv = s \cdot ds. \quad (2.61)$$

Чтобы найти дифференциал du , воспользуемся формулой дифференцирования интеграла по параметру. Тогда производная функции u по переменной s будет иметь вид:

$$u' = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right) \right)' \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)\right)}}. \quad (2.62)$$

Определим:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right) \right)' = - \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1-s^2}{1-e^2s^2} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{1-s^2} - \sqrt{1-e^2} \cdot s \cdot \frac{-2s}{2\sqrt{1-s^2}}}{1-s^2} = \\
 &= -\frac{1-s^2}{1-e^2s^2} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot (1-s^2 + s^2)}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2s^2) \cdot \sqrt{1-s^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Далее заметим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)\right) &= \cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^2} = \frac{1-s^2}{1-e^2s^2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)\right)} = \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1-s^2}{1-e^2s^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}s^2}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{2.64}$$

Таким образом, с учетом (2.63) и (2.64):

$$u' = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2s^2) \cdot \sqrt{1-s^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}s^2}{\sqrt{1-e^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2s^2} \cdot \sqrt{1-s^2}}.$$

Тогда

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{1-e^2s^2} \cdot \sqrt{1-s^2}}; \quad v = \frac{s^2}{2}. \tag{2.65}$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим:

$$J_b(e) = \int_0^1 s \int_0^{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot s}{\sqrt{1-s^2}}\right)} \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}} =$$

$$= \left(\frac{s^2}{2} \frac{\pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} s}{\sqrt{1-s^2}} \right)}{\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}} \right) \Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{s^2}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-e^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} ds \quad (2.66)$$

Если учесть, что

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot 1}{\sqrt{1-1^2}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

то

$$\left(\frac{s^2}{2} \frac{\pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} s}{\sqrt{1-s^2}} \right)}{\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \frac{\pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-1}} \right)}{\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}} - \frac{0}{2} \frac{\pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot 0}{\sqrt{1-0^2}} \right)}{\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}} = 0 - 0 = 0, \quad (2.67)$$

а следовательно, имеем:

$$J_b(e) = \int_0^1 s \int_0^1 \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = - \int_0^1 \frac{s^2}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-e^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} ds.$$

После простых преобразований найдем:

$$J_b(e) = \int_0^1 s \int_0^1 \frac{d\varphi ds}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} ds. \quad (2.68)$$

Делая замену $s = \sin \varphi$ в (2.68), получим:

$$J_b(e) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2e^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right]. \quad (2.69)$$

Таким образом, мы выразили интеграл в выражении (2.60) через известные эллиптические интегралы первого и второго рода. Если заметить еще, что в литературе интеграл $2J_b(e)$ обозначается через $D(e)$, то мы в точности получили формулу Герца для расчета большой полуоси эллипса контакта, которая возникает под внешней нормальной нагрузкой P .

Определим сближение δ упругих контактирующих тел, которое возникает под внешней нормальной нагрузкой P . Сближение, как уже отмечалось, можно найти из выражения (2.11):

$$\delta = v_0 \int_0^Q \frac{P K(e_Q)}{b_Q} dQ.$$

Если воспользоваться переменной s , которую мы ввели в (2.41), а также выражениями (2.42), (2.43), в которых мы выразили размеры площадки и эксцентриситет в зависимости от переменной s , а также если учесть значения величин t и h , которые были определены соответственно в (2.46) и (2.51), то выражение для сближения тел примет вид:

$$\delta = v_0 \frac{P(n+1)}{b} \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(1 - (1 - e^2) s^{2\left(\frac{n}{m} - 1\right)}\right) \sin^2 \varphi}} ds. \quad (2.70)$$

В частности, при $n = m$:

$$\begin{aligned} \delta &= v_0 \frac{P(n+1)}{b} \int_0^1 s^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} ds = \\ &= v_0 \frac{P(n+1)}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \int_0^1 s^{n-1} ds = v_0 \frac{P(n+1)}{bn} K(e), \end{aligned} \quad (2.71)$$

где $K(e)$ - эллиптический интеграл первого рода в форме Лагранжа.

Для задачи Герца имеем $n = m = 2$:

$$\delta = v_0 \frac{3P}{2b} K(e), \quad (2.72)$$

что также полностью совпадает с формулами Герца.

2.2. Распределение контактных напряжений по поверхности контакта

Напряжение $p(x, y)$ от элементарной внешней нагрузки dQ плоского эллиптического в плане штампа, как ранее отмечалось, распределяется в

зоне контакта в соответствии с выражением (2.5), поэтому напряжение $q(x, y)$ от нагрузки P будет равно:

$$q(x, y) = \int_{P_{xy}}^P p(x, y) dQ = \frac{1}{2\pi} \int_{P_{xy}}^P \frac{dQ}{a_Q b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2} - \frac{y^2}{b_Q^2}}}, \quad (2.73)$$

где P_{xy} - значение внешней нагрузки, соответствующее области контакта, на границе которой находится заданная точка с координатами (x, y) .

Производя замену переменной (2.41), перепишем (2.73) в следующем виде:

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{P_{xy}}^P \frac{dQ}{a_Q b_Q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_Q^2} - \frac{y^2}{b_Q^2}}} = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{\frac{P_{xy}}{P}}^1 \frac{s^{\frac{n-n-1}{m}} ds}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 s^{\frac{2n}{m}}} - \frac{y^2}{b^2 s^2}}}. \quad (2.74)$$

Определим нижний предел интегрирования в (2.74).

Так как точка (x, y) при внешней нагрузке P_{xy} лежит на границе площадки контакта с полуосями a_{xy}, b_{xy} , то для этой точки будет выполняться условие:

$$\frac{x^2}{a_{xy}^2} + \frac{y^2}{b_{xy}^2} = 1. \quad (2.75)$$

Следовательно, чтобы найти нагрузку P_{xy} , при которой данная точка (x, y) станет граничной точкой площадки контакта, мы должны решить уравнение относительно s :

$$\frac{x^2}{a^2 \cdot s^{\frac{2n}{m}}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot s^2} = 1. \quad (2.76)$$

Обозначим корень уравнения (2.76) через $s_0(x, y)$, тогда (2.74) переписывается в виде:

$$q(x, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{s_0(x, y)}^1 \frac{s^{\frac{n-n-1}{m}} ds}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 s^{\frac{2n}{m}}} - \frac{y^2}{b^2 s^2}}}. \quad (2.77)$$

Сравним полученное выражение с аналогичным, представленным в работе [19] при $n = m$.

В этом случае имеем:

$$q(x, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{s_0(x,y)}^1 \frac{s^{n-2} ds}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 s^2} - \frac{y^2}{b^2 s^2}}}. \quad (2.78)$$

Делаем замену переменной:

$$v^2 = \frac{x^2}{a^2 s^2} + \frac{y^2}{b^2 s^2}, \quad (2.79)$$

и, обозначая

$$t^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (2.80)$$

получим:

$$s^2 = t^2 \frac{1}{v^2}; \quad s = t \cdot \frac{1}{v}; \quad ds = -t \frac{1}{v^2} dv. \quad (2.81)$$

Так как $s_0(x, y)$ является корнем уравнения (2.76), то:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{1}{s^2} = 1.$$

Так как с учетом (2.80):

$$t^2 \cdot \frac{1}{s^2} = 1,$$

то

$$s_0(x, y) = t, \quad (2.82)$$

а следовательно, (2.78) примет вид:

$$q(x, y) = -\frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot t^{n-1} \int_1^t \frac{dv}{v^n \sqrt{1-v^2}} = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot t^{n-1} \int_t^1 \frac{dv}{v^n \sqrt{1-v^2}}. \quad (2.83)$$

Следует здесь отметить, что интеграл в правой части равенства при $t=0$ и $n \geq 1$ не существует, т.к. в этой точке подынтегральная функция терпит разрыв. Поэтому сделаем следующие преобразования.

Разложим функциональное выражение $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, стоящее под знаком интеграла в (2.83), в ряд Тейлора в окрестности точки $v=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{2k}}{(2k)!} \cdot \prod_{i=1}^k (2 \cdot i - 1)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i}. \quad (2.84)$$

Легко заметить, что ряд (2.84) в окрестности точки $v=0$ ($|v| < 1$) сходится. Это следует непосредственно из предельного признака сходимости Коши при $v < 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{v^{2k}}{(2k)!} \cdot \prod_{i=1}^k (2 \cdot i - 1)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{v^{2k} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i}} = v^2.$$

Тогда интеграл в правой части (2.83) можно записать:

$$\begin{aligned} \int_t^1 \frac{1}{v^n \sqrt{1-v^2}} dv &= \int_t^1 \frac{1}{v^n} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right] dv = \\ &= \int_t^1 \frac{1}{v^n} dv + \int_t^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} v^{2k-n} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right) dv. \end{aligned}$$

Если предположить, что $n \neq 1$, имеем:

$$\int_t^1 \frac{1}{v^n \sqrt{1-v^2}} dv = \frac{1-t^{1-n}}{1-n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right] \int_t^1 v^{2k-n} dv. \quad (2.85)$$

Подставляя (2.85) в выражение (2.83), получим:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} t^{n-1} \int_t^1 \frac{dv}{v^n \sqrt{1-v^2}} = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} t^{n-1} \times \\ &\times \left(\frac{1-t^{1-n}}{1-n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right] \cdot \int_t^1 v^{2k-n} dv \right) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab(n-1)} + \\ &+ \frac{P(n+1)}{2\pi ab(n-1)} t^{n-1} \left((n-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right] \cdot \int_t^1 v^{2k-n} dv - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Как видно из (2.86), в центре площадки контакта ($x=0, y=0 \Rightarrow t=0$) напряжение равно:

$$q(0,0) = p_0 = \frac{P(n+1)}{2\pi ab(n-1)}. \quad (2.87)$$

Окончательно выражение (2.83) можно переписать с учетом (2.87):

$$q(x, y) = p_0 \cdot (n-1) \cdot t^{n-1} \int_t^1 \frac{dv}{v^n \sqrt{1-v^2}}. \quad (2.88)$$

Выражения (2.88) и (2.87) полностью решают поставленную контактную задачу для случая $n = m \neq 1$. Кроме того, выражение (2.86) можно использовать для приближенного подсчета контактных напряжений внутри площадки контакта.

Выражение (2.88) можно представить иначе:

$$q(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot N_n(t), \quad (2.89)$$

$$N_n(t) = \frac{t^{n-1} \cdot (n-1)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dv}{t v^n \sqrt{1-v^2}}; \quad (2.90)$$

$$t = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Выражение (2.89) полностью совпадает с выражением для подсчета контактных напряжений по площадке контакта, представленным в работе [19].

Для целых значений n интеграл, стоящий в равенствах (2.86) и (2.90), легко считается. Например, при $n=2$ равенство (2.88) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= -p_0 \cdot t \int_0^t \frac{dv}{v^2 \sqrt{1-v^2}} = -p_0 \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{t} \cdot \sqrt{1-t^2} \right) = p_0 \cdot \sqrt{1-t^2} = \\ &= p_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \end{aligned}$$

что полностью соответствует формуле Г. Герца.

При $n=3$ выражение (2.88) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= -\frac{4P}{2\pi ab} t^2 \int_0^t \frac{dv}{v^3 \sqrt{1-v^2}} = -\frac{2P}{\pi ab} t^2 \left(-\frac{\sqrt{1-v^2}}{2v^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-v^2}}{v} \right| \right) \Bigg|_0^t = \\ &= \frac{2P}{\pi ab} t^2 \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right| \right) = \\ &= p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right| \right) \end{aligned}$$

или окончательно:

$$q(x, y) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right| \right),$$

где t определяется из выражения (2.80).

При $n=4$ получаем:

$$q(x, y) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + 2 \cdot t^2).$$

Подставив в это выражение явный вид значения p_0 и t , получим:

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ 2 \frac{5P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{15P}{2\pi ab \cdot 3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \\
 &- \frac{2}{3} \frac{5P}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5P}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \frac{5P}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}},
 \end{aligned}$$

что полностью совпадает с выражением, полученным И.Я. Штаерманом в работе [18].

Ниже приведем явный вид выражений для $N_n(t)$ при различных n :

n	$N_n(t)$
2	1
3	$1 + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arth}(\sqrt{1-t^2})$
4	$1 + 2 \cdot t^2$
5	$1 + \frac{3}{2} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arth}(\sqrt{1-t^2})$
6	$1 + \frac{4}{3} t^2 + \frac{8}{3} t^4$
7	$1 + \frac{5}{4} t^2 + \frac{15}{8} t^4 + \frac{15}{8} \cdot \frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \text{Arth}(\sqrt{1-t^2})$
8	$1 + \frac{6}{5} t^2 + \frac{8}{5} t^4 + \frac{16}{5} t^6$

Так как

$$0 \leq \sqrt{1-t^2} < 1,$$

то, как известно [170]:

$$\text{Arth}(\sqrt{1-t^2}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}} \right).$$

Можно заметить, при четных степенях n мы имеем полиномы степени $n-2$.

Таким образом, получены законы распределений напряжений на площадке контакта упругих тел с начальным точечным контактом под воздействием нормальной нагрузки P при условии, что функции зазора в главных сечениях описываются параболой одинаковой степени. Эти результаты, как уже отмечалось, впервые были опубликованы в работе [19].

Произведем теперь подсчет контактных напряжений в случае, когда $n \neq m$ вдоль большой оси площадки контакта.

В этом случае полагаем в (2.77) $x=0$. Тогда нижний предел интегрирования будет равен:

$$s_0 = \frac{y}{b},$$

и таким образом будем иметь выражение:

$$q(0, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \int_{\frac{y}{b}}^1 \frac{s^{\frac{n-n}{m}-1} ds}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2 s^2}}}. \quad (2.91)$$

Вводя, как и ранее, замену переменной:

$$v = \frac{y}{bs}, \quad (2.92)$$

перепишем (2.91) в виде:

$$\begin{aligned} q(0, y) &= -\frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n-n}{m}} \cdot \int_1^{\frac{y}{b}} \frac{dv}{v^{\frac{n-n}{m}+1} \sqrt{1-v^2}} = \\ &= \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n-n}{m}} \cdot \int_{\frac{y}{b}}^1 \frac{dv}{\frac{y}{b} v^{\frac{n-n}{m}+1} \sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Интеграл, стоящий в выражении (2.93), легко считается, если показатель степени $n - \frac{n}{m} + 1$ является целым числом. В частности, это возможно, если n и m являются целыми числами и $m|n$ (m делит n). Например, если $n=9$, $m=3$, имеем:

$$\int_{\frac{y}{b}}^1 \frac{dv}{y v^7 \sqrt{1-v^2}} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}{48y^6} \left(8b^6 + 10b^4y^2 + 15b^2y^4\right) + \frac{15}{48} \text{Arth} \left(\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \right). \quad (2.94)$$

Как известно,

$$\text{Arth} \left(\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}{1 - \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}, \text{ если } \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} < 1,$$

что соответствует нашему случаю.

При $y = b$ интеграл в (2.94) равен нулю, так как совпадают верхний и нижний пределы интегрирования.

Тогда напряжения вдоль большой полуоси рассчитываются по формуле:

$$q(0, y) = \frac{10 \cdot P}{2\pi ab} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{9-3} \cdot \int_{\frac{y}{b}}^1 \frac{dv}{y v^7 \sqrt{1-v^2}} = \frac{5P}{48\pi ab} \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot \left(8 + 10\left(\frac{y}{b}\right)^2 + 15\left(\frac{y}{b}\right)^4\right) + \frac{75}{96} \left(\frac{y}{b}\right)^6 \ln \frac{1 + \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}{1 - \sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}. \quad (2.95)$$

Таким образом, мы получили выражение для расчета контактных напряжений вдоль большой полуоси площадки контакта при взаимодействии упругих тел, первоначальный зазор между которыми описывается выражением:

$$z_1 - z_2 = Ay^9 + Bx^3.$$

Таким же образом решается задача и для других целых значений степеней функции начального зазора. Следует заметить, что для подсчета напряжения в центре площадки контакта это выражение использовать нельзя. Для расчета напряжений в центре площадки контакта в общем случае разложим подынтегральную функцию, стоящую в (2.93), в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$.

Ранее было разложено в ряд Тейлора выражение $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ (см. равенство (2.84)). Тогда

$$\int_{\frac{y}{b}v}^1 \frac{1}{v^{n-\frac{n}{m}+1} \sqrt{1-v^2}} dv = \int_{\frac{y}{b}v}^1 \frac{1}{v^{n-\frac{n}{m}+1}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right] dv =$$

$$= \int_{\frac{y}{b}v}^1 \frac{1}{v^{n-\frac{n}{m}+1}} dv + \int_t^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} v^{2k-n-1+\frac{n}{m}} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \right) dv.$$

Если предположить, что $n - \frac{n}{m} + 1 \neq 1$ (т.е. $m \neq 1$, $n \neq 0$), имеем:

$$\int_{\frac{y}{b}v}^1 \frac{1}{v^{n-\frac{n}{m}+1} \sqrt{1-v^2}} dv = \frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{m}-n}}{\frac{n}{m} - n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \int_t^1 v^{2k-n-1+\frac{n}{m}} dv \right]. \quad (2.96)$$

Подставляя (2.96) в выражение (2.93), получим:

$$q(x, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-\frac{n}{m}} \int_{\frac{y}{b}v}^1 \frac{dv}{v^{n-\frac{n}{m}+1} \sqrt{1-v^2}} = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-\frac{n}{m}} \times$$

$$\times \left(\frac{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{m}-n}}{\frac{n}{m} - n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \cdot \int_t^1 v^{2k-n-1+\frac{n}{m}} dv \right] \right) = \frac{P(n+1)}{2\pi ab \left(n - \frac{n}{m}\right)} +$$

$$+ \frac{P(n+1)}{2\pi ab \left(n - \frac{n}{m}\right)} \left(\frac{y}{b}\right)^{n-\frac{n}{m}} \left(\left(n - \frac{n}{m}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(2 \cdot i - 1)}{2i} \cdot \int_t^1 v^{2k-n-1+\frac{n}{m}} dv \right] - 1 \right). \quad (2.97)$$

Как видно из (2.97), в центре площадки контакта ($y = 0$) напряжение равно:

$$q(0,0) = p_0 = \frac{P(n+1)}{2\pi ab \left(n - \frac{n}{m}\right)} = \frac{P}{2\pi ab} \cdot \frac{(n+1)m}{(m-1)n}. \quad (2.98)$$

Из выражения (2.98) можно сделать следующий вывод. Если увеличивать значения n и m , то напряжение в центре площадки контакта будет убывать и достигнет своего минимума при $n = \infty$ и $m = \infty$, равного:

$$q(0,0) = \frac{P}{2\pi ab}, \quad (2.99)$$

что совпадает с напряжением в центре при действии штампа на упругое полупространство.

В частности, в рассмотренном примере ($n = 9$, $m = 3$)

$$q(0,0) = p_0 = \frac{5P}{6\pi ab}. \quad (2.100)$$

Определим распределение контактных напряжений вдоль малой полуоси эллипса контакта. В этом случае полагаем $y = 0$. Нижний предел интегрирования в (2.77) найдем из выражения (2.76):

$$\frac{x^2}{a^2 s^{2\frac{n}{m}}} = 1,$$

откуда

$$s = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}}. \quad (2.101)$$

Деля в (2.77) замену переменной, найдем:

$$v = \frac{x}{a \cdot s^{\frac{n}{m}}},$$

а затем получим:

$$s = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{1}{v^{\frac{m}{n}}}; \quad ds = -\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{m}{n}\right) \frac{1}{v^{\frac{m}{n}+1}} dv. \quad (2.102)$$

Тогда (2.77) запишется в виде

$$q(x,0) = -\frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n} \left(n - \frac{n-1}{m} \right) + \frac{m}{n}} \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{dv}{v^{\frac{m}{n} \left(n - \frac{n-1}{m} \right) + \frac{m}{n} + 1} \sqrt{1-v^2}} = \frac{P(n+1)}{2\pi ab} \cdot \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \int_{\frac{x}{a}}^1 \frac{dv}{v^m \sqrt{1-v^2}}. \quad (2.103)$$

Интеграл, стоящий в левой части (2.103), легко считается при любом целом значении m .

Следует отметить, что интегралы, встречающиеся в выражениях (2.93) и (2.103), можно записать иначе. Например, если в интеграле (2.103) сделать замену:

$$t = \sqrt{1 - v^2},$$

он примет вид:

$$\int_a^1 \frac{dv}{x v^m \sqrt{1 - v^2}} = \int_0^{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Кроме того, интегралы (2.93) и (2.103) можно выразить через гамма-функцию $\Gamma(x)$ и гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(a, b, c, z)$. Например, для интеграла (2.103) это выражение будет выглядеть так:

$$\int_a^1 \frac{dv}{x v^m \sqrt{1 - v^2}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{m-1} \left[-\frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right)}{m \cdot \Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} + \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{m}{2}, \frac{3}{2} - \frac{m}{2}, \frac{x^2}{a^2}\right)}{m-1} \right]$$

при условии:

$$0 < \frac{x}{a} < 1,$$

которое в нашем случае выполняется.

Выражение (2.103) дает возможность рассчитать напряжение во всех точках площадки контакта. Однако для расчета напряжений в центре площадки контакта проще воспользоваться выражением (2.98).

Таким образом, изменяя первоначальный зазор между контактирующими телами, можно регулировать распределение контактных напряжений по площадке контакта. Это особенно важно, например, в машиностроении при изготовлении подшипников. Формируя рациональный профиль дорожки качения, а вместе с тем и начальный зазор между шариком и желобом, можно добиться более равномерного распределения контактных напряжений по площадке контакта и тем самым увеличить долговечность подшипников и их грузоподъемность. Наоборот, уменьшая размеры площадки контакта между шариком и желобом, можно увеличить быстроходность подшипников.

2.3. Анализ влияния формы контактирующих тел на параметры упругого контакта

Выполненные исследования позволяют сделать выводы относительно влияния геометрической формы контактирующих тел на размеры площадки контакта и контактные напряжения, а следовательно, на их работоспособность.

Например, выражения (2.70) и (2.71) показывают, что от формы контактирующих тел зависит жесткость контакта. Так, из равенства (2.71) несложно получить выражение для расчета жесткости:

$$j_n = \frac{P}{\delta} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{b}{v_0 \cdot K(e)}$$

Из полученного выражения видно, что чем больше n , тем жесткость локального контакта выше. На рис.2.8 показана зависимость отношения значений жесткости j_n контакта упругих тел к значению жесткости j_2 при $n = 2$, при прочих равных условиях контакта ($b, K(e), v_0$).

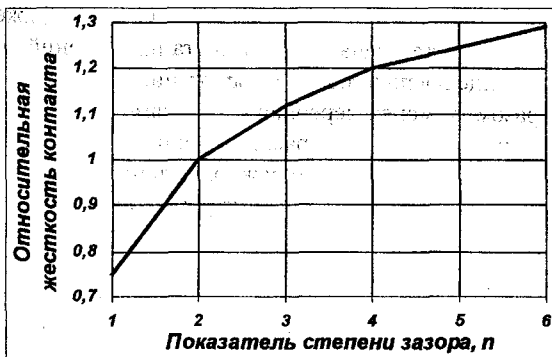


Рис. 2.8. Зависимость относительной жесткости контакта упругих тел от показателя степени в функции начального зазора между ними

Из рисунка видно, что жесткость контакта тел с увеличением n сначала быстро возрастает, а при $n \geq 4$ это влияние уменьшается. Следовательно, для увеличения жесткости контакта упругих тел нужно использовать значения n от 3 и выше и, наоборот, с целью увеличения податливости контакта лучше использовать меньшие значения n .

Малые значения n можно, например, использовать в радиально-упорных шарикоподшипниках. При нагреве таких подшипников осевые и радиальные зазоры, а также углы контакта между шариками и желобами колец значительно уменьшаются, что может вызвать заклинивание шариков и выход подшипника из строя. Однако с уменьшением угла контакта

возрастает нагрузка на шарики, и при малых значениях n шарики будут иметь значительное сближение с желобом, частично компенсируя уменьшение зазоров в шарикоподшипнике и предотвращая тем самым его поломку.

Задача состоит лишь в том, чтобы сделать профиль желоба, обеспечивающий начальное расстояние между ним и шариком с заданным n .

Наоборот, в точных зубчатых передачах, например, значение n желательнее иметь по возможности больше, т.к. это уменьшит влияние переменной внешней нагрузки на точность передаваемых движений от одного колеса к другому.

Значительно влияние на жесткость локального контакта оказывает эксцентриситет эллипса контакта. С увеличением эксцентриситета при $b = const$ увеличивается значение полного эллиптического интеграла $K(e)$, а следовательно, увеличивается податливость локального контакта. С изменением e от 0 (что соответствует круговой площадке контакта) до 0,9962 (которое наиболее часто используется в подшипниках качения) величина $K(e)$ изменяется от 1,57 до 3,83, что увеличивает податливость контакта почти в 2,5 раза.

Однако при сохранении площади контакта наблюдается противоположная зависимость. На рис. 2.9 показано изменение жесткости $j(e)$ контакта упругих тел при $n = 6$ в зависимости от эксцентриситета эллипса контакта e в отношении к жесткости контакта $j(0)$ той же площади ($\pi \cdot a \cdot b = const$), но при круговой площадке контакта ($e = 0$).

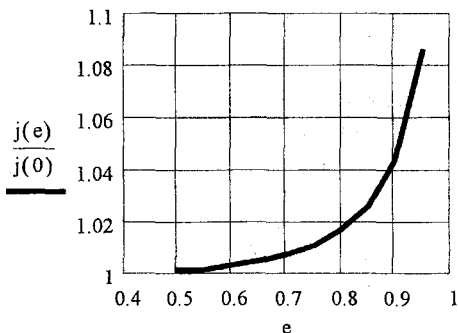


Рис. 2.9. Зависимость относительной жесткости контакта от эксцентриситета эллипса контакта

Как видно из рис. 2.9, даже при равных размерах площадки контакта с увеличением значения эксцентриситета жесткость контакта возрастает.

Таким образом, с целью увеличения жесткости локального контакта следует стремиться к большим значениям эксцентриситета эллипса контакта, а при необходимости снижения жесткости - по возможности использовать круговые площадки контакта соприкосновения тел.

Во многих случаях при контакте упругих тел большое значение имеют размеры пятна касания. Размеры пятна касания оказывают влияние на силы трения между контактирующими деталями, на условия проникновения в зону контакта смазки, на возможность отвода тепла из зоны нагружения и на многие другие условия работы деталей механизмов и машин. Формулы (2.54) показывают, что тем больше n , тем меньше влияние внешней нагрузки P на размеры пятна касания. Следовательно, с увеличением n жесткость локального контакта увеличивается, а размеры пятна касания уменьшаются, что создает возможность использования больших n в наиболее ответственных передачах. При этом, с одной стороны, увеличивается точность передаваемых движений от одного звена механизма к другому, а, с другой стороны, - улучшаются условия смазки и охлаждения нагруженной части деталей машин, что уменьшает их износ и позволяет длительное время сохранять заданную точность. Большие значения n оказывается полезным использовать в зубчатых передачах, подшипниках качения, кулачковых механизмах и во многих других случаях.

Формулы (2.77) и (2.79) показывают, что очень сложное и исключительно сильное влияние геометрическая форма контактирующих тел оказывает на величину и распределение контактных напряжений. На рис.2.10 показано распределение контактных напряжений вдоль оси зоны нагружения, когда $n = m$, а на рис. 2.11- распределение контактных напряжений при различных n и $m = 2$.

Из рис.2.10 видно, что с увеличением значения n величина напряжений в центре площадки контакта уменьшается. Это уменьшение наиболее интенсивно происходит до значения $n = 3$, а затем влияние формы контактирующих тел на величину напряжений в центре площадки контакта ослабевает.

При $n < 3$ наибольшие контактные давления сосредотачиваются в центре пятна контакта. Это обстоятельство, очевидно, окажется полезным при конструировании опор вращения, т.к. при этом уменьшится момент трения вращения.

При $n > 3$ наибольшие контактные напряжения сосредотачиваются ближе к периферии зоны нагружения.

Величина максимальных контактных напряжений уменьшается при увеличении n от 1 до 3. Как следует из формулы (2.89), при $n = m = 1$ максимальное контактное напряжение равно бесконечности.

При $n = m = 3$ контактные напряжения распределяются вдоль пло-

шадки контакта равномерно. Это значение n оказывается наиболее оптимальным для деталей, работающих при циклических нагрузениях. Известно, например, что долговечность подшипника качения зависит от величины максимальных контактных напряжений в 9-10-й степени. Так как при $n = m = 3$ величина максимальных контактных напряжений наименьшая, то создание профиля желоба, соответствующего этому значению n , будет способствовать значительному (в десятки раз!) повышению работоспособности подшипников.

То же самое можно сказать и о зубчатых передачах, опорах скольжения и прочих узлах механизмов и приборов.

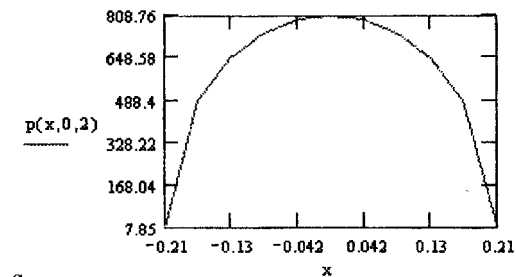
При $n = m > 3$ максимальное контактное напряжение с увеличением n вновь начинает увеличиваться. При n , стремящемся к бесконечности, получаются наибольшие контактные напряжения, которые сосредотачиваются в узком интервале вдоль границы зоны контакта, вызывая местное пластическое течение металла.

Как видно, данная методика позволит в каждом конкретном случае выбрать наиболее оптимальную геометрическую форму деталей машин, которая будет обеспечивать наиболее благоприятное распределение контактных напряжений, наиболее эффективные размеры площадки контакта и величину сближения контактирующих деталей, что в конечном счете даст возможность значительно увеличить долговечность, быстроходность, точность и надежность машин.

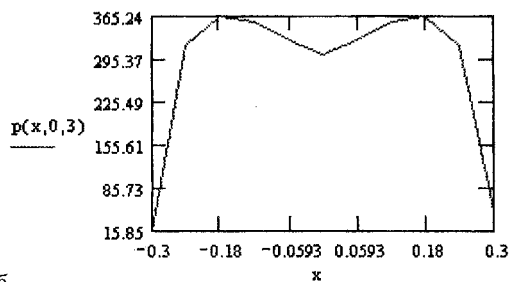
Следует отметить, что для обеспечения оптимальной геометрической формы деталей машин не обязательно придавать им параболическую форму. Надо использовать такую геометрическую форму, которая не вызывала бы технологических трудностей при изготовлении и с достаточной точностью позволила бы аппроксимировать реальный начальный зазор между телами уравнением параболы с заданными n и m . Выше было показано, что при соприкосновении тел, профиль которых в главных сечениях представляет собой дугу окружности, начальный зазор хорошо аппроксимируется степенной зависимостью ($n = 2$). При очень близком контакте, например при сжатии шара с узким желобом, для увеличения точности расчета можно использовать дробное значение n больше двух.

На практике часто можно полагать $m = 2$. В плоскости перемещения тел качения контактирующие тела представляют собой окружности, начальное расстояние между которыми хорошо аппроксимируется степенной зависимостью второй степени. При $m = 2$ эпюр контактных напряжений вдоль малой оси имеет форму эллипсоида, а в направлении большой полуоси – форму, соответствующую данному значению n .

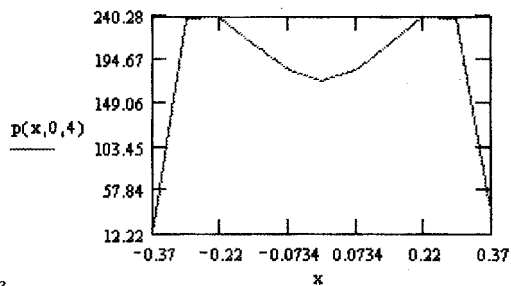
Характер распределения контактных напряжений при разных значениях показателя степени начального зазора n , но при постоянных значени-



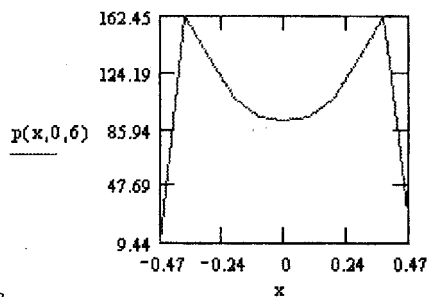
a



б

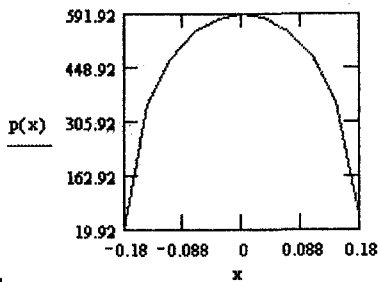


в

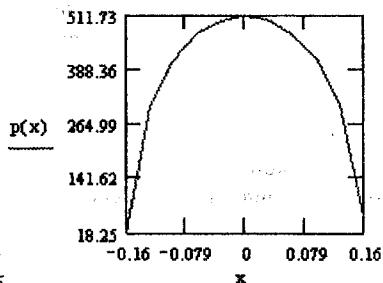


г

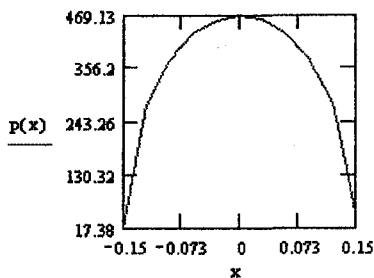
Рис. 2.10. Распределение контактных напряжений $p(x)$ (МПа) вдоль оси OX внутри площадки контакта в случае $n = t$: а- $n = 2$; б- $n = 3$; в- $n = 4$; г- $n = 6$



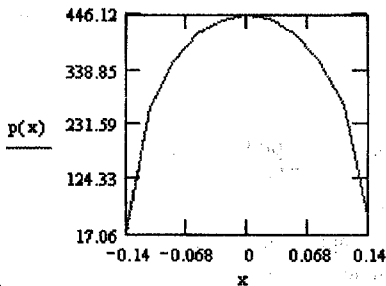
а



б



в



г

Рис. 2.11. Распределение контактных напряжений $p(x)$ (МПа) вдоль оси Ox внутри площадки контакта при $n \neq m$, $m=2$: а - $n=3$; б - $n=4$; в - $n=5$; г - $n=6$

ях $m=2$, существенно отличается от характера распределения контактных напряжений, который они имели при разных значениях n , но одинаковых значениях показателей степени в главных сечениях $n=m$. Из рис 2.11 видно, что даже при $n=6$ максимальное напряжение $m=2$ все же остается в центре площадки контакта. Однако и в этом случае с увеличением значения n максимальное напряжение на площадке контакта снижается. Так, если при $n=2$ максимальное контактное напряжение равно 808 МПа, то при $n=3$ оно снижается в 1,4 раза, а при $n=6$ - 1,8 раза. Это - весьма существенное снижение контактных напряжений. Если исходить из общепринятого мнения, что долговечность подшипника в 9-10 степени зависит от величины контактных напряжений, то, придавая рабочим поверхностям опор качения рациональную форму, можно в десятки раз увеличивать работоспособность подшипниковых опор, а следовательно, повышать надежность различных механизмов и машин. Вообще, создание конструкций подшипников качения, у которых начальное расстояние между шариком и желобом в поперечном сечении желоба описывалось бы степенной зависимостью с оптимальным значением n , является большим резервом повышения долговечности, быстроходности, работоспособности и надежности.

ГЛАВА 3. ПРИДАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ДЕТАЛЯМ НА ОПЕРАЦИЯХ ШЛИФОВАНИЯ

3.1. Формирование рациональной геометрии дорожек качения шарикоподшипников на операциях шлифования наклонным кругом

Как уже было показано, важнейшим фактором, влияющим на долговечность контактирующих поверхностей вращения, является их оптимальная геометрическая форма. Однако серьезным сдерживающим фактором на пути практического использования полученных результатов является несовершенство существующей технологии изготовления деталей сложной формы.

Из всех рассмотренных в гл.1 способов изготовления деталей типа колец шариковых подшипников сложного профиля самым простым в осуществлении является процесс врезного шлифования с правкой шлифовального круга фасонным алмазным роликом. Но этот инструмент очень дорогой и может эффективно использоваться только в условиях массового производства. В настоящее время в массовом масштабе подшипники производятся очень редко, тем более подшипники высокой точности и долговечности. Другие подобные изделия вообще изготавливаются небольшими сериями.

Большие возможности получения различных поверхностей вращения сложного профиля открываются, если использовать предложенный нами способ [171] шлифования фасонных поверхностей деталей типа колец подшипников шлифовальным кругом с осью вращения, скрещивающейся с осью вращения заготовки. В дальнейшем для краткости этот способ будем называть способом шлифования наклонным кругом.

Сущность способа заключается в следующем (рис. 3.1 и 3.2). Шлифовальный круг 1 с наружным диаметром D устанавливается под углом α по отношению к оси вращения заготовки 2.

Рабочая поверхность шлифовального круга 1 имеет тороидальную форму с радиусом профиля r . Шлифовальный круг имеет ось вращения I-I, заготовка 2 имеет ось вращения II-II. Оси шлифовального круга I-I и заготовки II-II скрещиваются под углом α .

Перед началом обработки шлифовальный круг 1 подвергается правке алмазным карандашом обычным образом. В процессе шлифования вращающийся вокруг оси I-I шлифовальный круг 1 подводится в радиальном направлении к вращающейся вокруг своей оси II-II заготовке 2 и врезается в ее поверхность. В результате снятия припуска поверхность заготовки 2

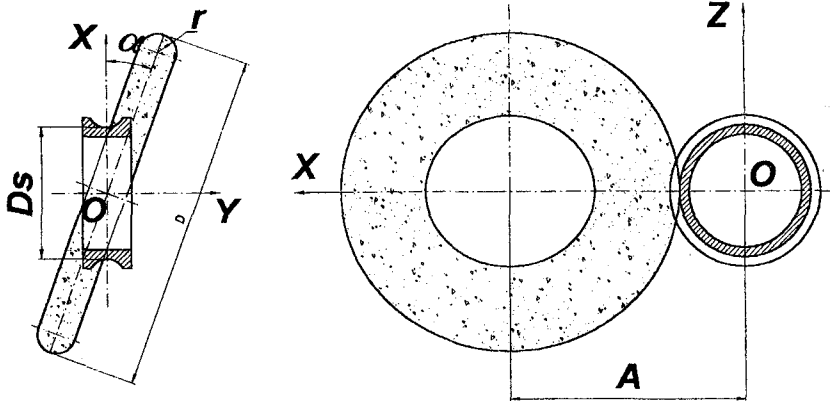


Рис. 3.1. Схема способа шлифования наклонным кругом деталей типа внутренних колец подшипников

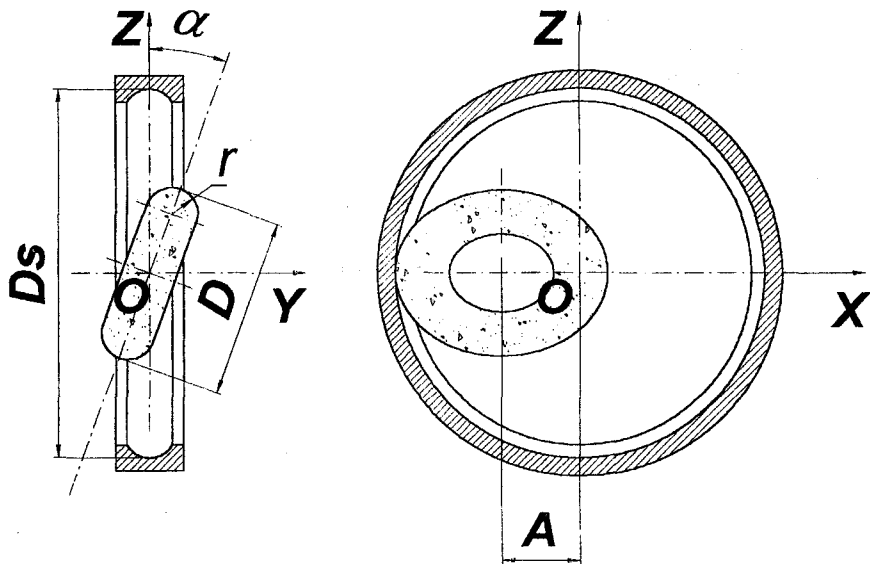


Рис. 3.2. Схема способа шлифования наклонным кругом деталей типа наружных колец подшипников

приобретает сложную форму с определенными геометрическими параметрами.

Шлифование наружных (рис. 3.1) и внутренних поверхностей (рис. 3.2) по данному способу отличается лишь тем, что в первом случае шлифовальный круг 1 находится с наружной поверхности заготовки 2 и может иметь неограниченные размеры, а во втором случае шлифовальный круг 1 находится внутри поверхности заготовки 2 и ограничен размерами заготовки.

Геометрические параметры профиля дорожки качения, получаемого при обычном шлифовании, когда оси шлифовального круга 1 и заготовки 2 параллельны ($\alpha = 0$), зависят только от одного параметра - радиуса r профиля шлифовального круга. А так как профиль круга имеет круговую форму, то и профиль заготовки получается идентичной круговой формы.

При шлифовании наклонным кругом для обеспечения заданной геометрической формы заготовки обеспечивается возможность варьировать не одним параметром, как при обычном шлифовании, а четырьмя параметрами настройки: углом его наклона α , диаметром круга D , радиусом его рабочей поверхности r и межосевым расстоянием A . Это позволяет достаточно точно воспроизводить форму заготовки, близкую к любой заданной сложной форме.

Определим уравнение профиля поверхности, получаемой шлифованием наклонным кругом. Для вывода уравнения выберем декартову систему координат с центром в т. O на пересечении осей симметрии заготовки, ось OY - ось вращения заготовки в плоскости XOZ (рис 3.3).

Найдем уравнение поверхности шлифовального круга в выбранной системе координат при условии, что ось шлифовального круга находится на расстоянии A от оси вращения обрабатываемой детали, круг имеет радиус R (отрезок $|MA|$ на рис.3.3) и радиус рабочей поверхности r .

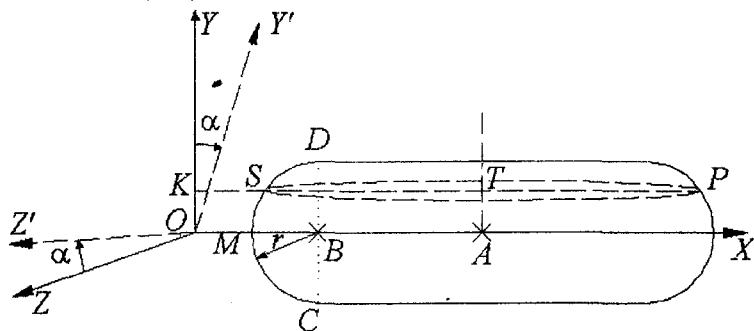


Рис.3.3. Схема расположения шлифовального круга в выбранной системе координат

При обычном шлифовании, когда оси круга и заготовки параллельны, уравнение, описывающее рабочую поверхность шлифовального круга, имеет достаточно простой вид. Например, в плоскости XOZ уравнение любой окружности круга имеет вид:

$$(x - A)^2 + z^2 = |TS|^2.$$

Для того, что бы связать величину $|TS|$ с координатами вдоль оси OY , напишем уравнение дуги окружности CMD , расположенной в плоскости XOY . Так как точка B - центр рабочей поверхности круга имеет координаты $(A - R + r, 0, 0)$, то уравнение окружности CMD имеет вид:

$$[x - (A - R + r)]^2 + y^2 = r^2$$

или

$$x = \pm \sqrt{r^2 - y^2} + A - R + r.$$

В последнем выражении возьмем знак " - ", так как мы рассматриваем процесс шлифования периферией шлифовального круга и поэтому нас интересует только левая половина окружности. Таким образом, уравнение CMD примет окончательно вид:

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2} + A - R + r.$$

Тогда

$$|TS| = |KT| - |KS| = A - \left(-\sqrt{r^2 - y^2} + A - R + r \right) = \sqrt{r^2 - y^2} + R - r,$$

и следовательно, уравнение рабочей поверхности круга будет иметь вид:

$$(x - A)^2 + z^2 = \left(\sqrt{r^2 - y^2} + R - r \right)^2.$$

Для удобства дальнейших расчетов запишем это уравнение несколько в другом виде:

$$\pm \sqrt{(x - A)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 - y^2} + R - r.$$

Берем знак "+", так как в правой части последнего уравнения стоит положительная величина, то положительная величина должна стоять и слева:

$$\left(\sqrt{(x - A)^2 + z^2} - R + r \right)^2 + y^2 = r^2.$$

Итак, мы записали уравнение рабочей поверхности тороидального шлифовального круга, ось вращения которого параллельна оси вращения заготовки. Используя это равенство, найдем уравнение рабочей поверхности шлифовального круга при повороте его вокруг оси OX на угол α .

Путь $XOY'Z'$ – система координат, которая получилась при повороте на угол α вокруг оси OX системы координат $XOYZ$. Тогда уравнение шлифовального круга в системе $XOY'Z'$ будет иметь вид:

$$\left(\sqrt{(x-A)^2 + z'^2} - R + r\right)^2 + y'^2 = r^2. \quad (3.1)$$

Так как координаты x, y, z связаны с координатами x', y', z' соотношениями:

$$\begin{cases} x' = x; \\ y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha; \\ z' = y \sin \alpha + z \cos \alpha, \end{cases} \quad (3.2)$$

то с учетом равенств (3.1) и (3.2) уравнение шлифовального круга в системе $XOYZ$ после поворота на угол α будет иметь вид:

$$F = (x-A)^2 + y^2 + z^2 + R_0^2 - 2R_0\sqrt{(x-A)^2 + (y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2} - r^2 = 0, \quad (3.3)$$

где $R_0 = R - r$.

Зная уравнение рабочей поверхности шлифовального круга, определим координаты точек контакта круга в каждом из сечений плоскостью ZOX ($y = \text{const}$) с получаемой при шлифовании поверхностью. На рис. 3.4 показана схема взаимодействия шлифовального круга и обрабатываемой заготовки в сечении $y = \text{const}$.

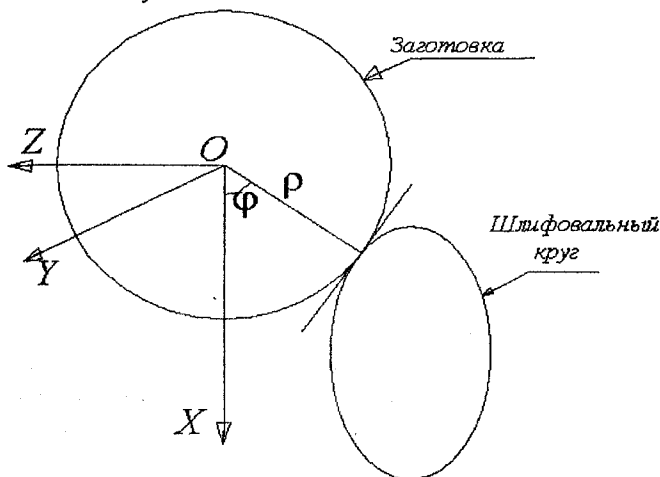


Рис. 3.4. Контакт шлифовального круга и обрабатываемой заготовки в сечении $y = \text{const}$

Введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (3.4)$$

Тогда уравнение (3.3) с учетом равенств (3.4) можно переписать следующим образом:

$$F = (\rho \cos \varphi - A)^2 + y^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi + R_0^2 - \\ - 2R_0 \sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2} - r^2 = 0$$

или

$$F = \rho^2 - 2A\rho \cos \varphi + y^2 + A^2 + R_0^2 - \\ - 2R_0 \sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2} - r^2 = 0. \quad (3.5)$$

Поверхности касаются в точке, если они в этой точке имеют общую касательную. Определим величину угла φ , для которого величина ρ , стоящая в уравнении (3.5), будет минимальной, т.е. будет выполняться условие:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.6)$$

Как известно, по теореме о дифференцировании неявных функций:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F}{\partial \rho}}. \quad (3.7)$$

Тогда из (3.6) и (3.7) можно записать:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0.$$

Дифференцируя (3.5) по φ , получим:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 2A\rho \sin \varphi - \\ - 2R_0 \frac{2(\rho \cos \varphi - A)\rho(-\sin \varphi) + 2(y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)\rho \cos \varphi \cos \alpha}{2\sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2}} = 0.$$

Так как $\rho \neq 0$, $\cos \varphi \neq 0$, то делим обе части последнего выражения на $2\rho \cos \varphi$:

$$A \operatorname{tg} \varphi - R_0 \frac{(A - \rho \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha) \cos \alpha}{\sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2}} = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, мы имеем систему уравнений относительно ρ и φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 - 2A\rho \cos \varphi + y^2 + A^2 + R^2 - 2Rr - \\ - 2(R-r)\sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2} = 0; \quad (3.9) \\ \operatorname{tg} \varphi - \frac{R-r}{A} \cdot \frac{(A - \rho \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha) \cos \alpha}{\sqrt{(\rho \cos \varphi - A)^2 + (y \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha)^2}} = 0. \end{array} \right.$$

Из системы (3.9) можно определить ρ и φ , а из (3.4) определить координаты точки (x, z) взаимодействия шлифовального круга с заготовкой в плоскости $y = \text{const}$ при заданных значениях A, R, r, α . Обрабатываемая деталь, проходя через точку (x, z) , в заданном сечении y описывает окружность радиуса $\rho_y = \sqrt{x^2 + z^2}$. Таким образом, точки (ρ_y, y) образуют профиль заготовки.

На рис. 3.5 показан получаемый профиль заготовки при одинаковых значениях радиуса профиля шлифовального круга, но различных углах его наклона к оси заготовки. На рис. 3.6 показаны различные профили заготовки, полученные при $\alpha = 0^\circ$, но при различных значениях радиуса профиля рабочей поверхности круга.

Как видно из рисунков, если профиль обрабатываемой детали аппроксимировать функцией:

$$y = \rho^v,$$

то с увеличением угла наклона шлифовального круга значение показателя степени будет увеличиваться.

Таким образом, меняя параметры шлифовального круга, можно заставить профиль заготовки пройти через заданную точку. Этого можно добиться, если решить систему (3.9) относительно, например, α и φ при заданной точке профиля (ρ_y, y) .

Очевидно, если взять угол $\alpha = 0$, то второе уравнение системы (3.9) имеет единственный корень $\varphi = 0$. Подставляя $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$ в первое уравнение, получим:

$$(\rho - A)^2 + y^2 + R^2 + 2Rr - 2(R-r)\sqrt{(\rho - A)^2} = 0.$$

Так как $\sqrt{(\rho - A)^2} = |\rho - A|$, а $\rho < A$, то $\sqrt{(\rho - A)^2} = A - \rho$ и последнее равенство переписывается в виде:

$$(\rho - A)^2 - 2(R-r)(A - \rho) + y^2 + R^2 + 2Rr = 0,$$

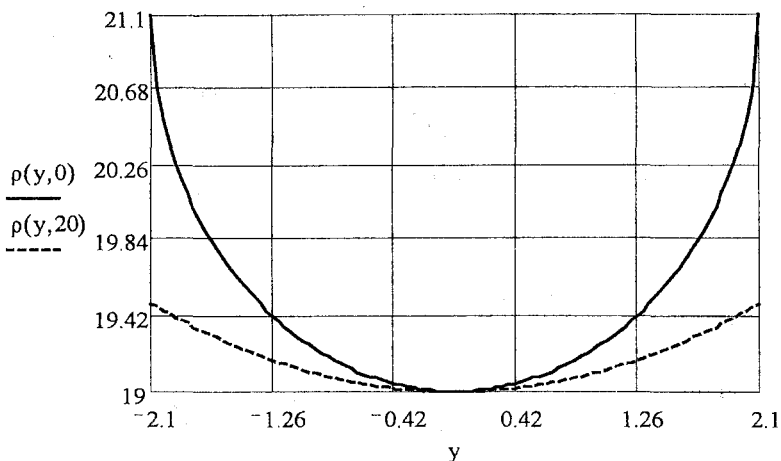


Рис.3.5. Профиль обрабатываемой детали шлифовальным кругом $R = 200$ мм, $r = 2,1$ мм., $A = 219$ мм., наклоненным под углом $\alpha = 0^0$ и $\alpha = 20^0$

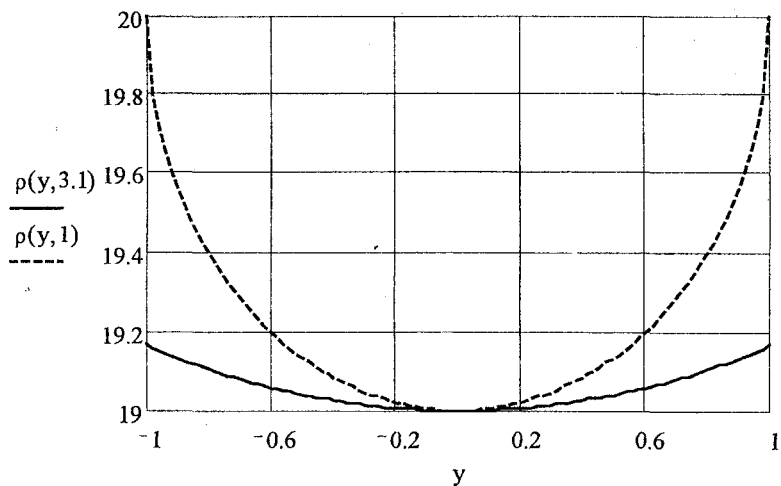


Рис.3.6. Профиль обрабатываемой детали шлифовальным кругом радиусом $R = 200$ мм, $A = 219$ мм., наклоненным под углом $\alpha = 0^0$ при радиусах рабочей поверхности $r = 2,1$ мм., $r = 1$ мм

решая которое относительно $A - \rho$, получим:

$$A - \rho = (R - r) \pm \sqrt{r^2 - y^2}$$

или

$$\rho = A - (R - r) \mp \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Из двух корней выбираем наименьший и окончательно имеем:

$$\rho = A - (R - r) - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Таким образом, имеем профиль: $(y, A - (R - r) - \sqrt{r^2 - y^2})$. При этом, как можно заметить из (3.4):

$$x = \rho, z = 0.$$

Очевидно, что изменяя параметры A, R, r, α , мы будем получать каждый раз новую точку (x, z) .

3.2. Алгоритм и программа расчетов рациональных параметров настройки процесса шлифования желобов колец шарикоподшипников наклонным кругом

Так как уравнение профиля дорожки качения кольца шарикоподшипника, шлифованного наклонным кругом, получено в неявном виде, то для определения его геометрических параметров необходимо использование вычислительной техники. Это тем более необходимо, если задачу решать комплексно с определением геометрических параметров упругого контакта поверхности дорожки качения с телом качения в шарикоподшипнике, без чего невозможно определить рациональные параметры настройки станка.

На рис. 3.7 представлена программа расчетов на ЭВМ параметров упругого контакта шарика и дорожки качения шарикоподшипника. Программа составлена для использования в системе MathCAD PLUS 7.0 PRO. Это – одна из самых мощных и эффективных математических систем, позволяющая выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления и имеющая прекрасные средства графики.

В начале программы записаны левые части выражений (3.9), определяющих уравнение профиля дорожки качения, полученного шлифованием наклонным кругом. Каждому из этих выражений присвоены соответствующие обозначения: $F1(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi)$ и $F2(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi)$, показывающие их зависимость от влияющих на геометрические параметры дорожки качения факторов: радиуса круга R , радиуса профиля круга r , расстояния A между осями круга и заготовки вдоль оси OX , угла наклона кру-

га (угла скрещивания осей круга и заготовки) α и текущих переменных величин: ординаты точки профиля y полярного радиуса ρ и полярного угла ψ в сечении круга плоскостью, параллельной плоскости XOZ.

Далее записываются начальные данные, не подвергающиеся коррекции. К числу не подлежащих в процессе расчетов коррекции факторов относятся радиус круга R , диаметр по дну желоба D_s , радиус желоба стандартного подшипника rg , диаметр шарика d_s и глубина желоба h .

Параметры профиля дорожки качения могут варьироваться за счет изменения радиуса профиля r и угла наклона круга α . За базу для определения сравнительной эффективности создания сложного профиля желоба был принят стандартный профиль. Диаметр по дну желоба задается чертежом, и поэтому оба желоба имеют одинаковые координаты вершины профиля. Но так как стандартный профиль определяется одним параметром - радиусом rg , а сложный - несколькими параметрами, то эти профили могут иметь и еще две общие, симметрично расположенные точки.

Известно, что при всем диапазоне внешних нагрузок размер большой полуоси площадки контакта в стандартных подшипниках не выходит за пределы половины ширины желоба. Но наиболее часто подшипники работают при средних нагрузках, при которых длина полуоси площадки контакта составляет примерно пятую часть от диаметра шарика. Из этих соображений выбираем абсциссу общей точки стандартного и сложного желоба $Y_{to} \approx 0,21d_s$ универсального подшипника. Если подшипник работает в специальных условиях, то задача упрощается и величина Y_{to} должна выбираться равной наиболее вероятной величине размера полуоси площадки контакта стандартного подшипника.

При заданной величине α задача сводится к отысканию с помощью системы из двух уравнений такого значения радиуса профиля шлифовального круга, при котором получаемый профиль дорожки качения будет проходить через две заданные точки. Данная задача в среде MathCAD репается с помощью специального вычислительного блока, именуемого Giveh. В приведенном примере расчета параметров сложного профиля желоба для подшипника 206 с помощью данного вычислительного блока выполнены расчеты значений r для трех значений угла наклона круга α : 0, 10 и 20 градусов.

Чтобы построить профиль желоба, необходимо знать координаты конечной точки профиля. Глубина желоба задана. Следовательно, необходимо определить ширину желоба при известных параметрах шлифования наклонным кругом. Для этого построена специальная программа, которая с заданным шагом задает значения ρ в пределах от $0,5D_s$ до $0,5D_s + h$ и

Заданы две функции

$$F1(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi) := (\rho \cdot \cos(\psi) - A)^2 + y^2 + \rho^2 \cdot \sin(\psi)^2 + (R - r)^2 - r^2 - 2 \cdot (R - r) \cdot \sqrt{(\rho \cdot \cos(\psi) - A)^2 + (y \cdot \sin(\psi) + \rho \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\alpha))^2}$$

$$F2(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi) := \tan(\psi) \cdot \rho^2 - 2 \cdot \sin(\psi) \cdot \left[A - \frac{(R - r)^2}{A} \sin(\alpha)^2 \right] \cdot \rho + \left[A^2 + y^2 - (R - r)^2 - r^2 \right] \cdot \tan(\psi) - 2 \cdot y \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{(R - r)^2}{A}$$

Начальные данные

ORIGIN:=1

R:= 200 мм Ds:= 36.475 мм ds:= 9.525 мм rg:= 0.515 · ds

Yto:= 2.05 Rs:= $\frac{1}{2} \cdot Ds$ A:= R + Rs rs:= $\frac{1}{2} \cdot ds$

h:= 0.2 · ds pto:= $-\sqrt{rg^2 - Yto^2} + Rs + rg$

Определяем радиус рабочей поверхности круга r, при котором профиль пройдет через точку (Yto, pto)

Начальное приближение r:= 14 ψ:= 0

Решение системы уравнений:

Given

$$F1(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi) = 0 \quad F2(R, r, A, \rho, y, \alpha, \psi) = 0 \quad r > 0 \quad Z(\alpha) := \text{Find}(r, \psi)$$

$$r(\alpha) := Z(\alpha)_1 \quad \psi(\alpha) := Z(\alpha)_2$$

Определяем профиль заготовки при повороте бруска, имеющий радиус рабочей поверхности r(α), на угол α

Начальное приближение ρ:= Rs ψ:= 0

Решение системы уравнений. Профиль описывается уравнением ρ = ρ(y, α).

Given

$$F1(R, r(\alpha), A, \rho, y, \alpha, \psi) = 0 \quad F2(R, r(\alpha), A, \rho, y, \alpha, \psi) = 0$$

$$\rho \geq Rs \quad Z(y, \alpha) := \text{Find}(\rho, \psi)$$

$$\rho(y, \alpha) := Z(y, \alpha)_1 \quad \psi(y, \alpha) := Z(y, \alpha)_2$$

Задаем массив углов α поворота бруска, при котором будут в дальнейшем производиться расчеты

$$j := 1..3 \quad \alpha_j := 2 \cdot (j - 1) \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{180} \quad r_{0j} := r(\alpha_j) \quad \Gamma_j := r_{0j}$$

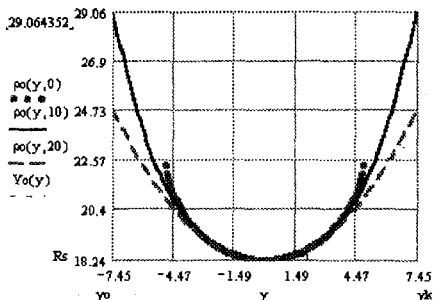
Рис. 3.7. Программа расчета профиля дорожки качения шарикоподшипника, шлифованной наклонным кругом, и ее параметров контакта с шариком

Определим размер обрабатываемой области кругом на заготовке вдоль оси Y

$$y_{00}(\alpha) := \begin{cases} j \leftarrow \frac{\alpha}{10} + 1 \\ -r_j \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) + (R - r_j) \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \end{cases} \quad y_{0k}(\alpha) := -y_{00}(\alpha)$$

$$y_0 := \min(y_{00}(20) \quad y_{0k}(20)) \quad y_k := \max(y_{00}(20) \quad y_{0k}(20))$$

Строим графики профиля при различных углах наклона круга, проходящие через заданную точку $Y_0 = Y_0$



Определяем участок профиля, для которого выполняется условие $\rho(y, \alpha) \leq R_s + h$

$$y_{\min j} := \begin{cases} y \leftarrow 0 \\ k \leftarrow 0 \\ \text{while } k \geq -3 \\ \quad \text{while } \rho(y, \alpha_j) \leq R_s + h \\ \quad \quad y \leftarrow y - 10^k \\ \quad \quad y \leftarrow y + 10^k \\ \quad \quad k \leftarrow k - 1 \end{cases} \quad y_{\min} = \begin{bmatrix} -3.88 \\ -3.95 \\ -4.12 \end{bmatrix} \quad y_{\max} := -y_{\min}$$

Вычисляем ns узловых точек профиля, которые лежат в интервале $[y_{\min}, y_{\max}]$ и которые в дальнейшем будут аппроксимироваться степенной зависимостью

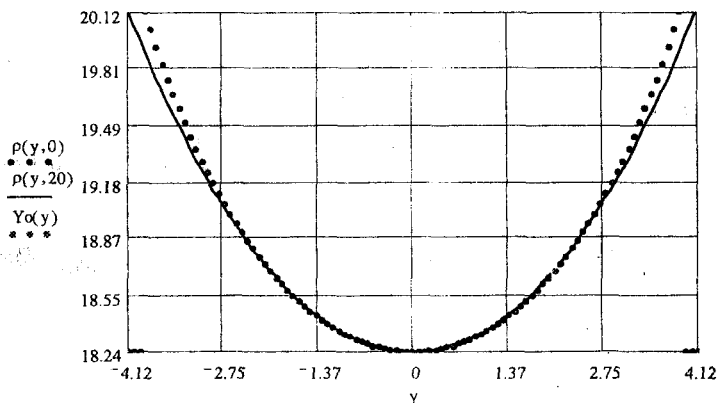
$$ns := 100 \quad i := 1..ns + 1 \quad dh_j := \frac{y_{\max j} - y_{\min j}}{ns} \quad y_{i,j} := y_{\min j} + (i - 1) \cdot dh_j \\ \rho_{i,j} := \rho(y_{i,j}, \alpha_j)$$

Рис. 3.7. Продолжение

По значениям точек профиля ρt строим непрерывную функцию значение которой между соседними узловыми точками аппроксимируется линейной функцией

$$\rho(y, \alpha) := \begin{cases} j - \frac{\alpha}{10} + 1 \\ i \leftarrow \text{floor} \left(\frac{y - y_{\min_j}}{dh_j} + 1 \right) \\ R_s \text{ if } (y < y_{\min_j}) \text{ or } (y_{\max_j} < y) \\ \rho_{t_{i,j}} + \frac{y - y_{i,j}}{y_{i+1,j} - y_{i,j}} \cdot (\rho_{t_{i+1,j}} - \rho_{t_{i,j}}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Строим графики профиля в новом диапазоне (y_{\min_j}, y_{\max_j}) , проходящие через заданную точку $Y_0 = Y_{to}$.



Определим зазор между шариком и желобом в главных сечениях заготовки и аппроксимируем его функцией вида $F(y, A, n) := A \cdot y^n$

Уравнение шарика в плоскости главных сечений заготовки:

$$\rho_{sy}(y) := -\sqrt{rs^2 - y^2} + R_s + rs$$

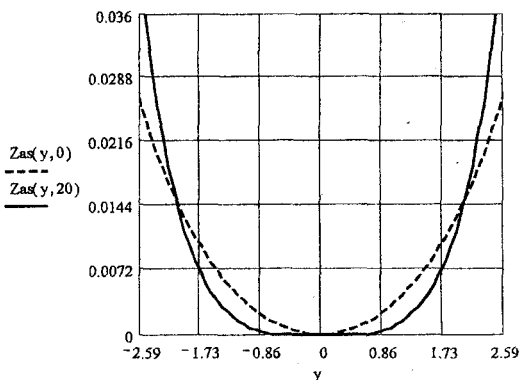
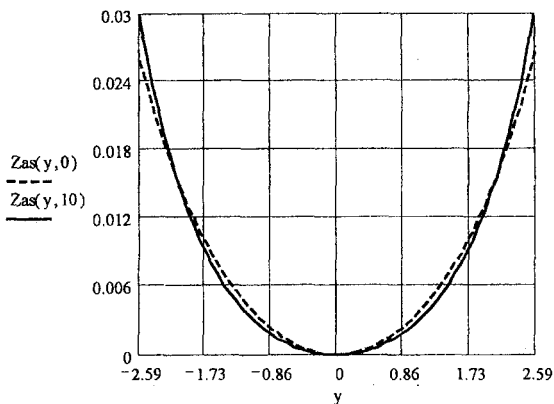
$$\rho_{sx}(x) := -\sqrt{rs^2 - x^2} + R_s + rs$$

Определяем истинный зазор между шариком и профилем в сечении $X = 0$

$$Z_{as}(y, \alpha) := \rho_{sy}(y) - \rho(y, \alpha)$$

Строим графики зазора между шариком и профилем вдоль оси Y
 $y = y_{\min_1}, y_{\min_1} + dh_1 \dots y_{\max_1}$

Рис. 3.7. Продолжение



Аппроксимируем зазор для
положительных значений y

$$i := \frac{ns}{2} + 2..ns + 1$$

$$ya_{i-1-\frac{ns}{2},j} := y_{i,j} \quad ZY_{i-1-\frac{ns}{2},j} := Zaz\left(ya_{i-1-\frac{ns}{2},j}, \alpha_{0,j}\right)$$

Запишем матрицы $ZY_{i-1-\frac{ns}{2},j}$

$$vy_j := \text{submatrix}\left(ya, 1, \frac{ns}{2}, j, j\right)$$

и $ya_{i-1-\frac{ns}{2},j}$ в виде векторов

$$VZY_j := \text{submatrix}\left(ZY, 1, \frac{ns}{2}, j, j\right)$$

Аппроксимируем зазор функций: $Fz(t, A, n) := A \cdot t^n$

Рис. 3.7. Продолжение

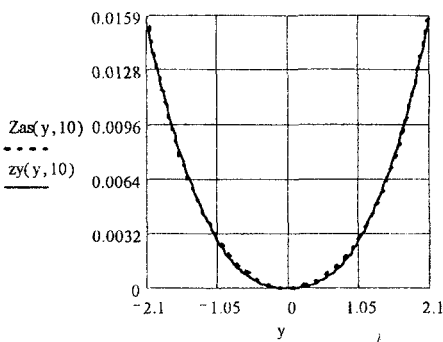
$$\frac{d}{dA} Fz(t, A, n) \rightarrow t^n \quad \frac{d}{dn} Fz(t, A, n) \rightarrow A \cdot t^n \cdot \ln(t)$$

$$F1(y, k) := \begin{bmatrix} k_1 \cdot y^{k_2} \\ y^{k_2} \\ k_1 \cdot y^{k_2} \cdot \ln(y) \end{bmatrix} \quad VS := \begin{bmatrix} 500 \\ 10 \end{bmatrix} \quad P(j) := \text{genfit}(vy_j, vZY_j, VS, F1)$$

$$zas(y, j) := F1(y, P(j))_1 \quad A_j := P(j)_{1,1} \quad n_j := P(j)_{2,1} \quad zy(y, \alpha) = \begin{cases} j \leftarrow \frac{\alpha}{10} + 1 \\ A_j \cdot |y|^{n_j} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3.109 \cdot 10^{-3} \\ 2.478 \cdot 10^{-3} \\ 7.836 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} 2.007 \\ 2.476 \\ 4.097 \end{bmatrix}$$

Графики зазоров представленные в виде функций $Zas(y, \alpha)$ и $zy(y, \alpha)$ для различных α



Определяем истинный зазор между шариком и профилем в сечении $Y = 0$
 Профиль заготовки в другом главном сечении описывается уравнением:

$$xd(x) := \sqrt{R\zeta^2 - x^2}$$

Тогда зазор между шариком и желобом

$$Zaz(x) := psx(x) - xd(x)$$

Аппроксимируем зазор для положительных значений

$$z_0 := 0 \quad z_k := \frac{rs}{10} \quad zh := \frac{zk - z_0}{ns} \quad i := 1..ns$$

x

$$zs_i := z_0 + i \cdot zh \quad ZS_i := Zaz(zs_i)$$

Рис. 3.7. Продолжение

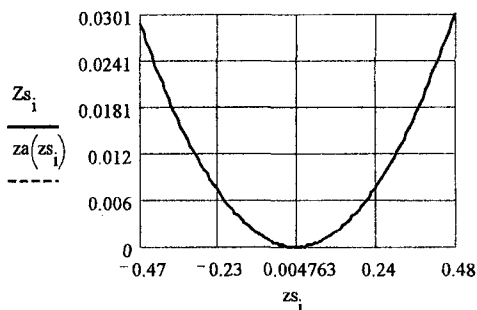
Аппроксимируем зазор функцией: $Fz(t, B, m) := B \cdot t^m$

$$\frac{d}{dB} Fz(t, B, m) \rightarrow t^m \quad \frac{d}{dm} Fz(t, B, m) \rightarrow B \cdot t^m \cdot \ln(t)$$

$$F1(y, k) := \begin{bmatrix} k_1 \cdot y^{k_2} \\ y^{k_2} \\ k_1 \cdot y^{k_2} \cdot \ln(y) \end{bmatrix} \quad VS := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P := \text{genfit}(zs, ZS, VS, F1)$$

$$zas(x) := F1(x, P)_1 \quad B := P_{1,1} \quad m := P_{2,1} \quad za(x) := B \cdot |x|^m$$

$$B = 0.133 \quad m = 2.002$$



Контактная задача

Исходные данные:

- модуль упругости шарика $Es := 2,1 \cdot 10^4$
- коэффициент Пуассона для шарика $\mu s := 0,3$
- модуль упругости заготовки $Ed := 2,1 \cdot 10^4$
- коэффициент Пуассона для заготовки $\mu d := 0,3$

Тогда

$$v s := \frac{1 - \mu s}{\pi \cdot Es} \quad v d := \frac{1 - \mu d}{\pi \cdot Ed}$$

$$v := v s + v d$$

Вычисление верхних пределов для внутренних интегралов

$$\psi a(\epsilon p, s, j) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } (\epsilon p = 1) \text{ or } ((\epsilon p \neq 1) \text{ and } (s = 1)) \\ \text{atan}\left(\frac{s}{\sqrt{1 - \epsilon p^2} \cdot \sqrt{1 - s^2}}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 3.7. Продолжение

$$\psi_b(ep, s, j) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } ep=1 \\ 0 & \text{if } (ep \neq 1) \text{ and } (s=1) \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} \left[\frac{s^{\frac{n_j}{m}} \sqrt{1 - ep^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

Вычисление эксцентриситета эллипса, зависящего от s

$$es(ep, s, j) := \sqrt{1 - (1 - ep^2) \cdot s^{2 \cdot \left(\frac{n_j}{m} - 1\right)}}$$

Обозначим подынтегральную функцию через

$$R(ep, s, \psi, j) := \frac{s^{n_j - 1}}{\sqrt{1 - es(ep, s, j)^2 \cdot \sin(\psi)^2}}$$

Внутренний интеграл примет вид

$$Jv(ep, \psi_0, s, j) := \int_0^{\psi_0} R(ep, s, \psi, j) d\psi$$

Обозначим внутренние интегралы:

$$Jav(ep, s, j) := Jv(ep, \psi_a(ep, s, j), s, j)$$

$$Jbv(ep, s, j) := Jv(ep, \psi_b(ep, s, j), s, j)$$

$$Jov(ep, s, j) := Jv\left(ep, \frac{\pi}{2}, s, j\right)$$

$$Jan(ep, s, \alpha) := \begin{cases} j \left\lfloor \frac{\alpha}{10} + 1 \right\rfloor \\ Jav(ep, s, j) \end{cases} \quad Jbn(ep, s, \alpha) := \begin{cases} j \left\lfloor \frac{\alpha}{10} + 1 \right\rfloor \\ Jbv(ep, s, j) \end{cases}$$

$$Jon(ep, s, \alpha) := \begin{cases} j \left\lfloor \frac{\alpha}{10} + 1 \right\rfloor \\ Jov(ep, s, j) \end{cases}$$

$$Jn(ep, s, k, \alpha) := \begin{cases} Jon(ep, s, \alpha) & \text{if } k = 0 \\ Jan(ep, s, \alpha) & \text{if } k = 1 \\ Jbn(ep, s, \alpha) & \text{if } k = 2 \end{cases}$$

Запишем внешний интеграл

$$J(ep, k, \alpha) := \int_0^1 Jn(ep, s, k, \alpha) ds$$

Рис. 3.7. Продолжение

Введем вспомогательные функции и вспомогательную величину

$$I(\epsilon, \alpha) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow \frac{\alpha}{10} + 1 \\ J(\epsilon, 0, \alpha) - J(\epsilon, 1, \alpha) \\ \hline J(\epsilon, 2, \alpha)^{\frac{m+1}{n_j+1}} \end{array} \right.$$

$$C(\alpha) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow \frac{\alpha}{10} + 1 \\ \text{vo} \frac{n_j - m}{(n_j + 1) - m} \left[\frac{A_j^{\frac{m+1}{n_j+1}} (n_j + 1)^{\frac{n_j - m}{n_j + 1}}}{B} \right]^{\frac{1}{m}} \end{array} \right.$$

$$Fu(\epsilon, P, \alpha) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow \frac{\alpha}{10} + 1 \\ \sqrt{1 - \epsilon^2} - C(\alpha) \cdot P^{\frac{n_j - m}{m(n_j + 1)}} \cdot J(\epsilon, \alpha) \end{array} \right.$$

Тогда из уравнения $Fu(\epsilon, P, \alpha) = 0$ определяем значение ϵ .

При $\epsilon = 1$ имеем $\psi_a = \psi_b = \frac{\pi}{2}$, $\epsilon_s = 1$. Тогда

$$Jv(\epsilon, \frac{\pi}{2}, s, j) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s^{n_j - 1}}{|\cos(\psi)|} d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s^{n_j - 1}}{\cos(\psi)} d\psi = \ln \left[\frac{1 + \sin(\psi)}{\cos(\psi)} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Как видно, при $\epsilon = 1$ интегралы не существуют. Поэтому в дальнейшем будем считать $\epsilon < 1$. Обозначим максимальное значение ϵ , для которого будем производить расчеты через $\epsilon_k := 0.999$.

Из уравнения

$Fu(\epsilon, P, \alpha) = 0$ определяем эксцентриситет ϵ

$$\epsilon(P, \alpha) := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow 0.1 \\ B \leftarrow \epsilon_k \\ \text{while } |A - B| > \text{TOL} \\ \quad X \leftarrow \frac{A + B}{2} \\ \quad A \leftarrow X \text{ if } \Phi(Fu(X, \alpha)) = \Phi(Fu(A, \alpha)) \\ \quad B \leftarrow X \text{ otherwise} \\ X \end{array} \right.$$

Рис. 3.7. Продолжение

А затем определяем
размеры большой полу-
оси площадки контакта

$$b(P, \alpha) := j \cdot \frac{\alpha}{10} + 1$$

$$\left[\frac{P \cdot v_0 \cdot (n_j + 1) \cdot J(\text{ep}(P, \alpha), 2, \alpha)}{A_j} \right]^{\frac{1}{j \cdot n_j + 1}}$$

и малой

$$a(P, \alpha) := b(P, \alpha) \cdot \sqrt{1 - \text{ep}(P, \alpha)^2}$$

График зависимости размера большой полуоси эллипса контакта от внешней нагруз-
ки P при различных углах поворота круга

$$P_0 := (500, 1500, 2500, 3500, 4500, 5500)$$

$$i := 1..6 \quad P_i := P_{0,i}$$

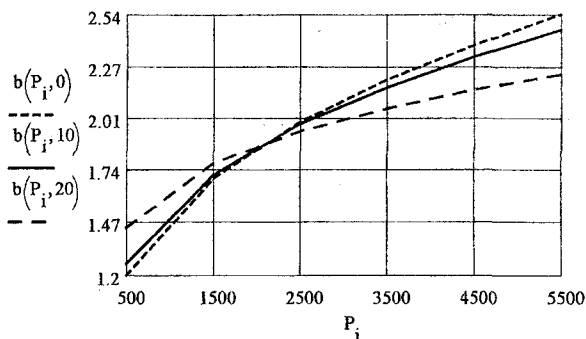


График зависимости эксцентриситета эллипса контакта в зависимости от внешней
нагрузки P при различных углах поворота шлифовального круга

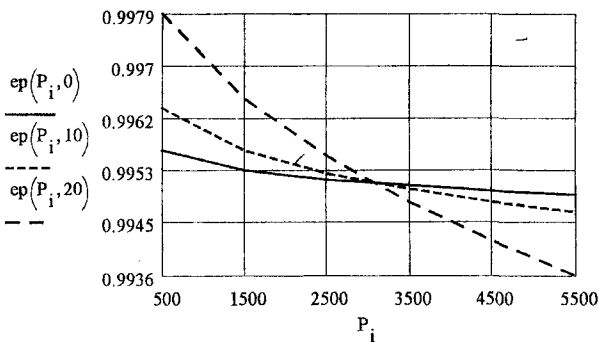
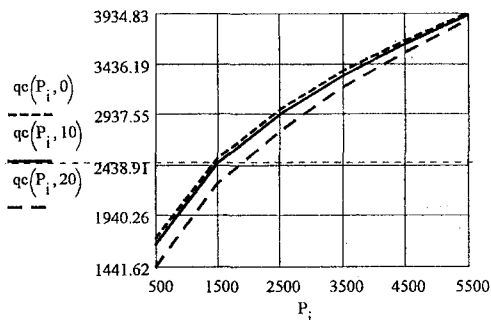


Рис. 3.7. Продолжение

Определение напряжений в центре площадки контакта, а также вдоль осей площадки контакта

Вычисление напряжений в центре площадки контакта

$$q_c(P, \alpha) := \left| j \left\langle -\frac{\alpha}{10} + 1 \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a(P, \alpha) \cdot b(P, \alpha)} \cdot \frac{m \cdot (n_j + 1)}{n_j \cdot (m - 1)} \cdot P \right. \right.$$



Вычисление напряжений вдоль большой полуоси эллипса контакта

$$q(yt, P, \alpha_0) := \left| j \left\langle -1 + \frac{\alpha_0}{10} \right. \right. \\ \left. \left. k \left\langle -j \right. \right. \right. \\ \left. \left. i \left\langle -1 \text{ if } P=500 \right. \right. \right. \\ \left. \left. i \left\langle \frac{P-500}{1000} + 1 \text{ otherwise} \right. \right. \right. \\ \left. \left. 0 \text{ if } |yt| \geq b_{i,k} \right. \right. \\ \left. \left. \text{otherwise} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{P \cdot (n_k + 1)}{2 \cdot \pi \cdot a_{i,k} \cdot b_{i,k}} \cdot \left(\frac{|yt|}{b_{i,k}} \right)^{n_k - \frac{n_k}{m}} \cdot \int_0^{\sqrt{1 - \left(\frac{yt}{b_{i,k}} \right)^2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{n_k - \frac{n_k}{m} + 2}{2}}} dt \text{ if } yt \neq 0 \right. \right. \\ \left. \left. q_c(P, \alpha_0) \text{ otherwise} \right. \right.$$

Рис. 3.7. Продолжение

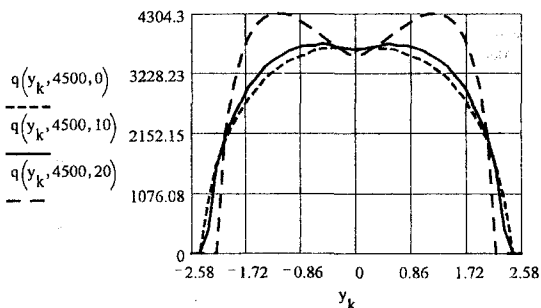


Рис. 3.7. Окончание

вычисляет значения абсциссы крайней точки профиля желоба Y_{\min} .

Далее назначается число точек профиля ns и для каждой точки с заданным значением абсциссы y по специальной программе определяется ордината профиля $\rho(y, \alpha)$. Переменные в скобках указывают на то, что величина ρ является функцией от значений y и α .

Убедиться в правильности выполненных расчетов можно с помощью построения графика зависимости $\rho(y, \alpha)$ от y . В качестве примера программа содержит графические зависимости, выполненные для стандартного профиля и двух сложных профилей, полученных шлифованием под углом 10 и 20 градусов. Из графика видно, что все указанные профили удовлетворяют заданному условию, т.е. имеют заданные общие точки.

Далее нас будет интересовать не весь профиль дорожки качения, а только тот его участок, на котором осуществляется контакт с шариком под действием внешней нагрузки. Как ранее было отмечено, этот участок имеет абсциссу от 0 до Y_{to} .

Для расчета параметров упругого контакта шарика и дорожки качения нам необходима аппроксимация функции зазора между ними. Для этого, имея координаты точек профиля дорожки качения и соответствующие координаты шарика с их начальным контактом в вершине профиля желоба, находим функцию зазора между шариком и желобом в зависимости от расстояния y до начальной точки контакта. Строим графические зависимости и убеждаемся в том, что функции зазора в стандартном подшипнике и со сложным профилем желоба существенно различны. При построении профилей дорожек качения стандартного подшипника и со сложным профилем желоба это различие было почти незаметным. Но так как размеры профиля шарика близки к размерам профиля желоба, то даже небольшие

изменения в профиле дорожки приводят к существенным изменениям формы зазора.

Будем предполагать, что функция зазора между желобом и шариком удовлетворительно будет описываться такой зависимостью:

$$F(x, a, b) = a \cdot x^b.$$

Строя графические зависимости фактической и аппроксимированной функции зазора убеждаемся в достаточно высокой точности выполненной математической операции. Следовательно, функцию зазора с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать степенной функцией произвольной степени. А это открывает возможность расчета параметров упругого контакта тел и дорожек качения сложного профиля по предложенной ранее (гл.2) методике.

Таким же образом аппроксимируем функцию зазора между шариком и дорожкой качения в продольном направлении. В виде матриц выводим результаты расчета значений абсцисс и ординат функций зазоров, полученных теоретическим способом и путем аппроксимации этих зазоров степенной функцией. Убеждаемся в том, что, независимо от угла наклона круга, функция зазора в продольном направлении описывается степенной функцией второй степени. Во всяком случае разница между теоретическими и аппроксимирующими значениями величин зазоров не превышает 1%. Строим графическую зависимость, отражающую функцию зазора в направлении качения. Анализируя графики, приходим к выводу, что теоретическая и аппроксимирующая зависимости практически совпадают.

Переходим к решению контактной задачи. Задаемся значениями модуля упругости и коэффициента Пуассона. Записываем выражения для определения внутренних интегралов в зависимостях для расчета полуосей и эксцентриситета площадок контакта.

Затем считаем внешние интегралы. Сначала находим эксцентриситет e площадки контакта при различных нагрузках. Далее вычисляем размер большой полуоси при каждой из этих нагрузок, а размеры малой полуоси определяются элементарно. Для того, чтобы убедиться в правильности выполненных построений, строим графические зависимости размерных параметров площадки контакта от нагрузки.

Далее рассчитываются напряжения в центре площадки контакта. Строится соответствующая графическая зависимость, которая показывает изменения контактных напряжений в центре площадки контакта от нагрузки.

Расчет распределения контактных напряжений требует построения специальной программы. Программа предусматривает несколько циклов

расчетов, связанных с необходимостью суммирования величины напряжений в каждой точке от элементарных внешних нагрузок в процессе изменения нагрузки от начального нулевого значения до заданной величины. Строятся зависимости, определяющие распределение величины контактных напряжений вдоль главных осей площадки контакта. На этом завершается цикл расчетов размеров площадок контакта и контактных напряжений от влияющих факторов.

3.3. Анализ влияния способа шлифования на параметры контакта дорожек и тел качения

Способ шлифования дорожек качения шарикоподшипников оказывает существенное влияние на форму профиля, а следовательно, на все параметры контакта дорожек и тел качения. В качестве примера на рис. 3.8 представлен профиль дорожки качения, получаемый при углах скрещивания осе круга и заготовки, равном 10 градусов, а на рис. 3.9 - профиль дорожки, получаемый при угле скрещивания 20 градусов. Для сравнения пунктирной линией показан стандартный профиль.

Размеры шарика и геометрические параметры внутреннего кольца соответствуют конструкторской документации на шариковый подшипник 206: диаметр шарика 9,525 мм; радиус желоба 4,905 мм; диаметр кольца по дну желоба 36,475 мм. Шлифование дорожки качения осуществляется шлифовальным кругом диаметром 400 мм. Профиль шлифовального круга имеет профиль в виде дуги окружности, радиус которой зависит от угла скрещивания осей шлифовального круга и заготовки. Радиус профиля шлифовального круга подбирался таким, чтобы при разных углах скрещивания размер площадки контакта шарика с размером дорожки качения совпадали при внешней нагрузке на шарик, равной 2000Н.

Размеры дорожки качения намного больше тех изменений в профиле, которые происходят при развороте шлифовального круга относительно заготовки. Поэтому на графиках почти не видна разница в профилях. Хотя при внимательном рассмотрении, особенно второго графика, можно заметить, что профили дорожек качения стандартного подшипника и полученного шлифованием наклонным кругом имеют по три общие точки - одну по дну дорожки качения и две по обе стороны от оси ее симметрии. Во всех других точках профили не совпадают. Более наглядно это видно на матрице результатов расчета, которая показывает разницу в координатах точек профиля. Следовательно, в районе дна дорожки качения, полученной шлифованием наклонным кругом, обеспечивается более близкий контакт с шариком чем в стандартном подшипнике.

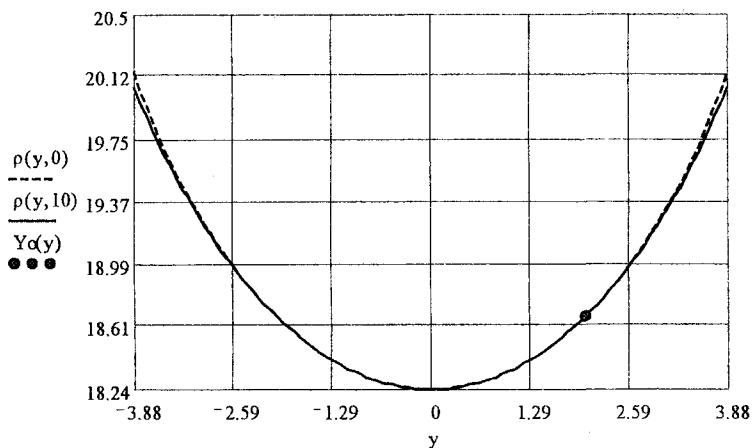


Рис. 3.8. Профиль дорожки качения шарикоподшипника, полученный при шлифовании наклонным кругом под углом 10 градусов (сплошная линия), и профиль стандартного подшипника (пунктирная линия)

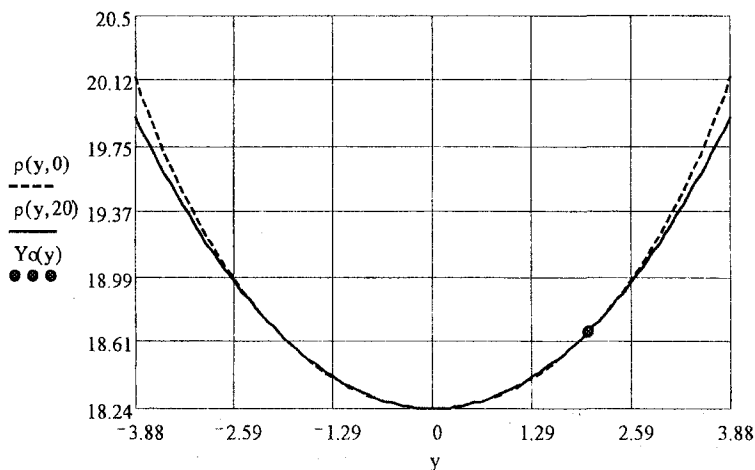


Рис. 3.9. Профиль дорожки качения шарикоподшипника, полученный при шлифовании наклонным кругом под углом 20 градусов (сплошная линия), и профиль стандартного подшипника (пунктирная линия)

Это обеспечивает повышение несущей способности контакта, и с увеличением угла наклона круга несущая способность контакта возрастает.

В точках, расположенных за пределами точки пересечения профилей, линия профиля дорожки качения, шлифованной наклонным кругом, расположена выше линии профиля дорожки качения стандартного подшипника. Разница между линиями профилей возрастает с увеличением угла наклона круга. Это – весьма важное обстоятельство, так как ограничивает размер площадки контакта.

Таким образом, профиль дорожки качения, полученный шлифованием наклонным кругом, с одной стороны, обеспечивает более «близкий» ее контакт с шариком вблизи начальной точки контакта, что должно увеличивать несущую способность контакта, с другой стороны, при некотором удалении от начальной точки контакта профиль дорожки качения, шлифованной наклонным кругом, получается как бы «разваленным», по сравнению со стандартным профилем, что должно ограничивать размер площадки контакта и снижать трение в подшипнике.

Сказанное подтверждается рис. 3.10 и 3.11, где изображены зависимости величины зазора между шариком и желобом стандартного подшипника (пунктирная линия) и желобом, шлифованным наклонным кругом (сплошные линии), от расстояния до начальной точки контакта. Как видно, величина зазора вблизи начальной точки контакта в стандартном подшипнике сначала возрастает по сравнению с зазором в подшипнике, дорожка качения которого шлифована наклонным кругом. Затем эта разница уменьшается. После точки пересечения кривых зависимостей начальный зазор в подшипнике со сложным профилем желоба становится выше, чем в стандартном подшипнике, и тем больше, чем больше расстояние рассматриваемых точек от начальной точки контакта.

С целью использования для расчета параметров контакта дорожек и тел качения теоретических зависимостей, изложенных в гл.2, осуществлялась аппроксимация фактического начального зазора параболой n -й степени. На рис. 3.12 представлены сплошными линиями аппроксимирующие зависимости, а пунктирными линиями - фактические зависимости величин зазоров между шариком и дорожкой качения от расстояния до начальной точки контакта. Как видно, аппроксимирующие зависимости достаточно точно описывают фактические профили дорожки качения. С увеличением угла наклона круга величина показателя степени параболы возрастает, а значение коэффициента уменьшается. Важно отметить, что для стандартного кругового профиля функция начального зазора не соответствует параболе второй степени, как это обычно принимается в стандартных методах расчета.

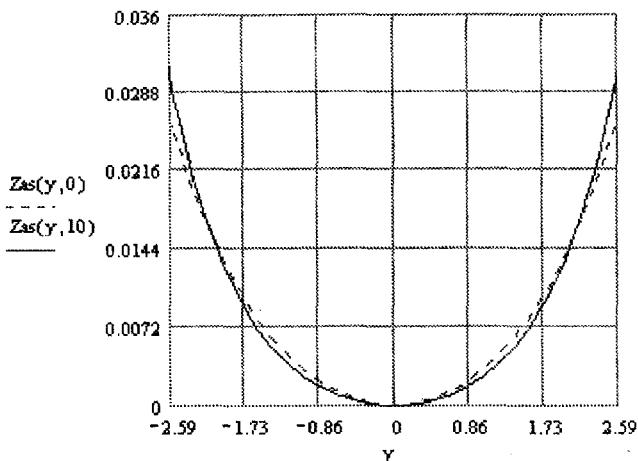


Рис. 3.10. Функция зазора между шариком и дорожками качения стандартного подшипника (пунктирная линия) и подшипника, полученного при шлифовании наклонным кругом под углом 10 градусов (сплошная линия)

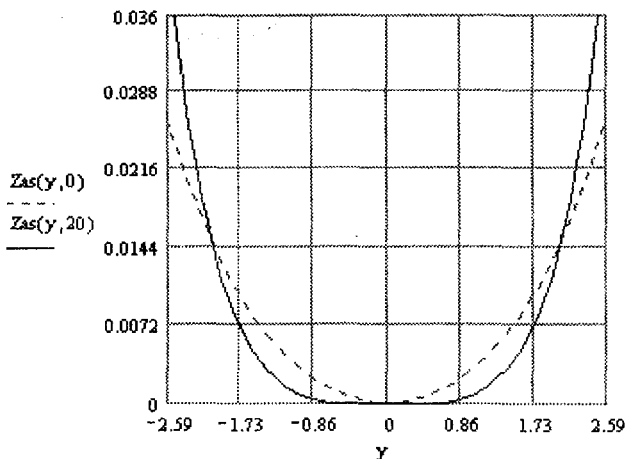
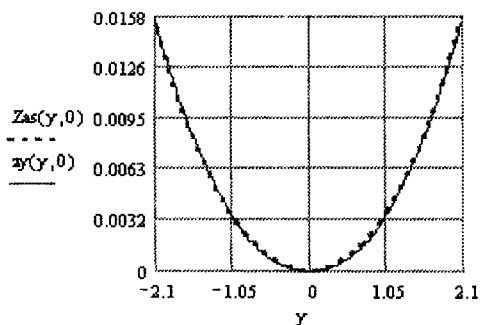
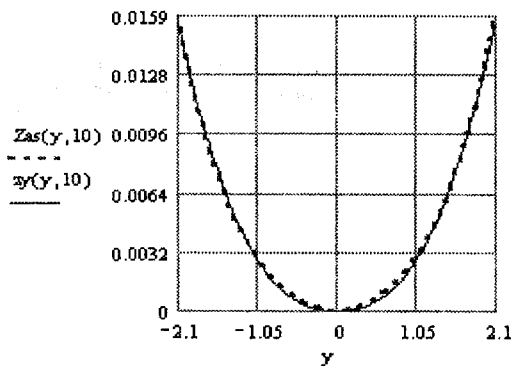


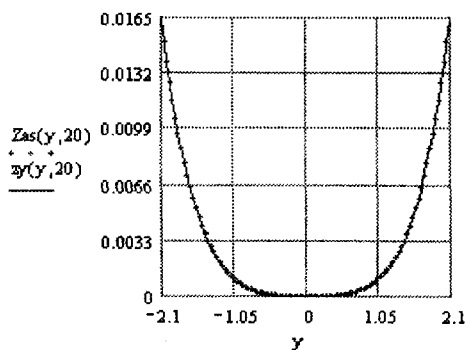
Рис. 3.11. Функция зазора между шариком и дорожками качения стандартного подшипника (пунктирная линия) и подшипника, полученного при шлифовании наклонным кругом под углом 20 градусов (сплошная линия)



a



б



в

Рис. 3.12. Фактические (пунктирные линии) и аппроксимирующие (сплошные линии) зависимости функции начального зазора от расстояния до начальной точки контакта: а- стандартный профиль ($A=0,0031$ $n=2,17$); б- сложный профиль, полученный при $\alpha = 10^\circ$ ($A=0,0025$ $n=2,48$); в- сложный профиль, полученный при $\alpha = 20^\circ$ ($A=0,0008$ $n=4,1$)

Однако и размеры площадок контакта в подшипниках обычно намного меньше ширины дорожки качения. Так, для нашего случая контакта на полной глубине профиля функция зазора достаточно точно описывается параболой степени $n=2,4$. Однако на глубине профиля дорожки качения, составляющей примерно одну треть от полной глубины профиля, на которой обычно осуществляется контакт с шариком. при всех возможных внешних радиальных нагрузках, функция зазора описывается параболой степени $n=2,17$ с коэффициентом $A=0,0031$. При еще меньших глубинах взаимного контакта шарика и дорожки качения, соответствующих весьма малым внешним нагрузкам, функция зазора описывается параболой второй степени.

Таким образом, в связи с тем, что в стандартную методику расчетов параметров контакта упругих тел по формулам Герца заложена форма начального зазора в виде параболы второй степени, то при больших нагрузках и значительных размерах площадок контакта формулы она может дать ошибочный результат даже при использовании стандартного кругового профиля. Для описания упругого контакта тел сложной формы она вообще неприемлема.

Форма профиля дорожки качения безусловно оказывает влияние на размеры и характер изменения пятна контакта между шариками и дорожками качения в подшипнике под действием внешней нагрузки. На рис. 3.13-3.16 представлены зависимости размера большой, малой полуосей и эксцентриситета эллипса контакта шарика с внутренним кольцом подшипника от действующей нагрузки для стандартного желоба (пунктирная линия) и желобов, полученных шлифованием наклонным кругом при углах наклона α , равных 10 и 20 градусов (сплошная линия). Как видно из рисунков, с возрастанием нагрузки размер большой полуоси площадки контакта возрастает, но с различной интенсивностью при различных α . При нагрузке, меньшей 2000Н, с возрастанием угла скрещивания осей размер площадки возрастает. При нагрузке, большей 2000Н, с возрастанием угла скрещивания осей размер полуоси площадки контакта уменьшается и тем значительно, чем выше внешняя нагрузка.

Следовательно, шлифование наклонным кругом позволяет регулировать размер площадки контакта. Особенно это важно для тихоходных тяжело нагруженных подшипников, так как в стандартном подшипнике при больших нагрузках возрастает размер большой полуоси площадки контакта и за счет ее кривизны резко увеличиваются потери на трение. В подшипнике со сложным профилем желоба при больших нагрузках размер большой полуоси площадки контакта получается меньше, чем в стандартном подшипнике. Поэтому затраты на трение уменьшаются, а это, как известно,

оказывает значительное влияние на работоспособность подшипников.

Однако, помимо размера площадки контакта, на работоспособность подшипников влияют величины контактных напряжений. В стандартном подшипнике с увеличением радиуса профиля дорожки качения размер площадки контакта уменьшается, а контактные напряжения возрастают, и наоборот. Такая однозначность влияния профиля дорожки на параметры контакта ограничивает возможность оптимизации геометрических параметров профиля желоба.

Поэтому, уменьшая размер площадки контакта, например, за счет развала желоба, мы, с одной стороны, снижаем трение и повышаем работоспособность подшипника. Но, с другой стороны, увеличиваются контактные напряжения и работоспособность подшипника снижается.

Это противоречие существенно можно уменьшить при использовании в подшипнике сложного профиля дорожки качения, полученной шлифованием наклонным кругом. Так, на рис. 3.17 и 3.18 представлены зависимости величины контактных напряжений в центре площадки контакта шарика с кольцом подшипника стандартного профиля (пунктирные линии) и с кольцом подшипника сложного профиля, полученного шлифованием наклонным кругом под углом 10 и 20 градусов. Из рисунков видно, что во всем диапазоне внешних нагрузок от 0 до 2000Н в подшипнике со сложным профилем желоба, полученным наклонным кругом при $\alpha = 10^\circ$, контактные напряжения в центре площадки получаются меньше, чем в стандартном подшипнике. При угле наклона круга $\alpha = 20^\circ$ диапазон внешних нагрузок, при котором контактные напряжения в центре площадки контакта получаются меньше, чем в стандартном подшипнике, увеличивается до 5500Н. Но в большей части этого диапазона внешних нагрузок размеры большей полуоси площадки контакта в подшипнике со сложным профилем меньше, чем в стандартном подшипнике. Как известно [175 и др.], уменьшение контактных напряжений в центре площадки контакта при одновременном снижении размера площадки контакта приводит к существенному повышению работоспособности подшипника.

Благоприятное влияние на работоспособность подшипника оказывает и изменение в подшипнике со сложным профилем по сравнению со стандартным подшипником эпюры контактных напряжений. На рис. 3.19 и 3.20 показаны эпюры контактных напряжений между шариком и желобами колец стандартного профиля и сложного профиля. Пунктирными линиями показаны эпюры напряжений, соответствующие стандартному профилю, сплошными линиями – соответствующих сложному профилю, шлифованному при угле наклона круга 10 и 20 градусов.

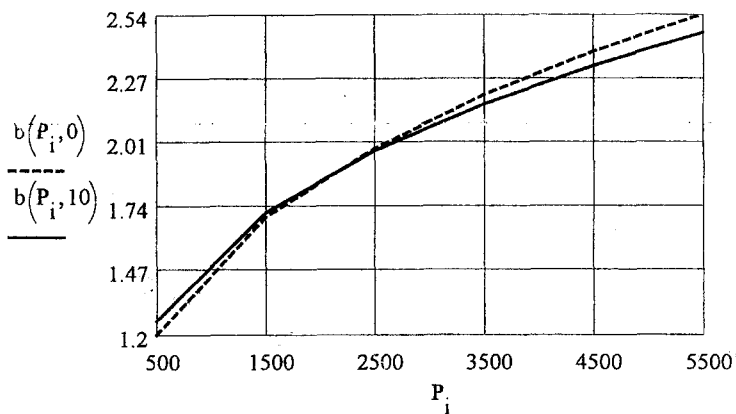


Рис. 3.13. Зависимость размеров большой b полуоси площадки контакта от величины внешней нагрузки P в стандартном подшипнике (пунктирная линия) и в подшипнике со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 10^\circ$ (сплошная линия)

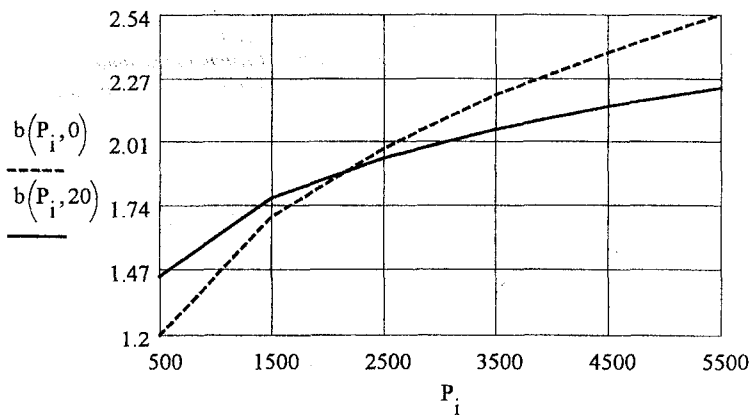


Рис. 3.14. Зависимость размеров большой b полуоси площадки контакта от величины внешней нагрузки P в стандартном подшипнике (пунктирная линия) и в подшипнике со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия)

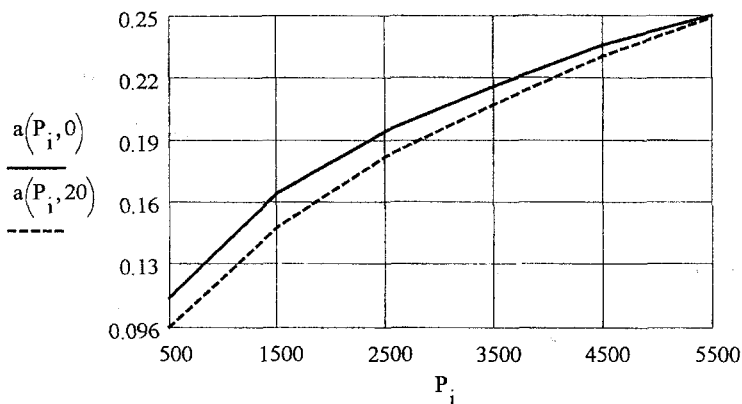


Рис. 3.15. Зависимость размеров малой $a(P, \alpha)$ полуоси площадки контакта от величины внешней нагрузки P в стандартном подшипнике (пунктирная линия) и в подшипнике со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия)

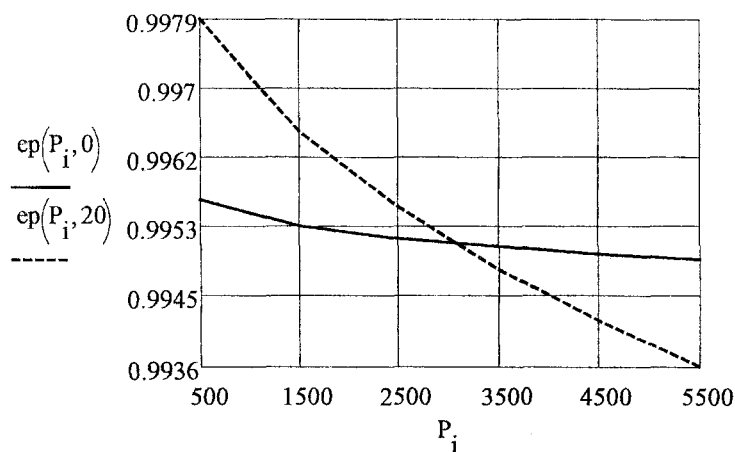


Рис. 3.16. Зависимость эксцентриситета e_r полуоси площадки контакта от величины внешней нагрузки P в стандартном подшипнике (пунктирная линия) и в подшипнике со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия)

Результаты, представленные на рис. 3.19, получены при внешней нагрузке 500Н, на рис. 3.20 - при внешней нагрузке 4500Н.

Как видно из рисунков, формы эпюр контактных напряжений во всех указанных случаях существенно различаются между собой. С увеличением угла наклона круга напряжение в центре площадки контакта уменьшается. Как известно, в центре площадки контакта в процессе работы подшипника возникает наибольшее проскальзывание между поверхностями тел и дорожек качения. Поэтому это напряжение оказывает наиболее существенное влияние как на момент трения подшипника, так и на его долговечность. В работах [35, 172 и др.] утверждается, что величина контактных напряжений в центре площадки контакта влияет на долговечность подшипника в 10-й степени! Это объясняется тем, что в месте действия высоких контактных напряжений возникает значительная сила трения, что приводит к резкому снижению циклической прочности поверхностей.

Если исходить из этого, то, как следует из рис. 3.19, шлифование дорожки качения наклонным кругом при угле наклона в 20 градусов обеспечивает снижение напряжений в центре площадки контакта в 1,25 раза и повышение долговечности подшипника более чем в 9 раз. Это – очень существенный результат.

Выше отмечалось, что стандартная методика расчета параметров контакта тел и дорожек качения не всегда обеспечивает необходимую точность расчетов даже для подшипников стандартной конструкции. В частности, на рис. 3.21-3.22 представлены размеры, эксцентриситеты площадок контакта, значения контактных напряжений в центре площадок контакта и эпюры контактных напряжений, получаемые при различных нагрузках при взаимодействии шарика с кольцом стандартной конструкции, рассчитанные по стандартной методике и по предлагаемой методике. Как видно, при малых внешних нагрузках все эти значения, рассчитанные по обоим методикам, практически совпадают. Это лишний раз подчеркивает непротиворечие двух методик.

Однако при значительных внешних нагрузках размеры большой полуоси площадки контакта получаются меньше, а размеры малой полуоси, рассчитанные по предлагаемой методике, получаются больше, чем при расчете по стандартной методике. С ростом внешней нагрузки эксцентриситет площадки контакта, рассчитанный по стандартной методике, не изменяется, а в соответствии с расчетами по предлагаемой методике, уменьшается. Напряжения в центре площадки контакта при больших нагрузках различаются по обоим методикам до 10%. При больших нагрузках существенно различаются между собой эпюры контактных напряжений. Различия в расчетах по стандартной и по предлагаемой методикам объясняются тем,

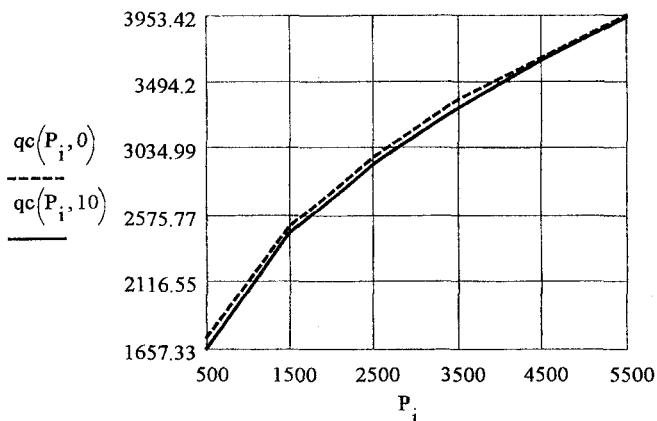


Рис. 3.17. Зависимость величины контактных напряжений σ в центре площадки контакта от внешней нагрузки P между шариком и кольцом стандартного профиля (пунктирная линия) и кольцом со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 10^\circ$ (сплошная линия)

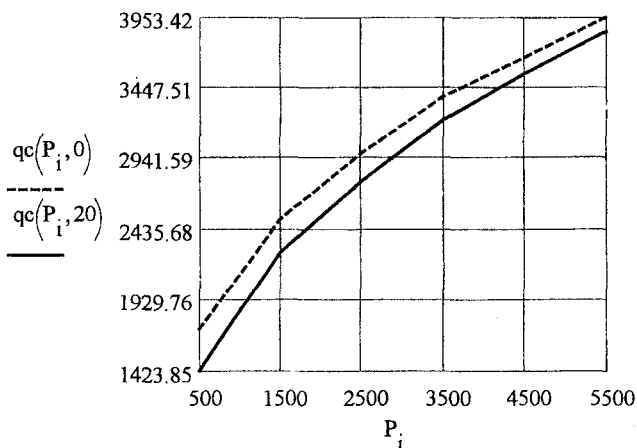


Рис. 3.18. Зависимость величины контактных напряжений σ в центре площадки контакта от величины внешней нагрузки P между шариком и кольцом стандартного профиля (пунктирная линия) и кольцом со сложным профилем, полученным шлифованием наклонным кругом при угле $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия)

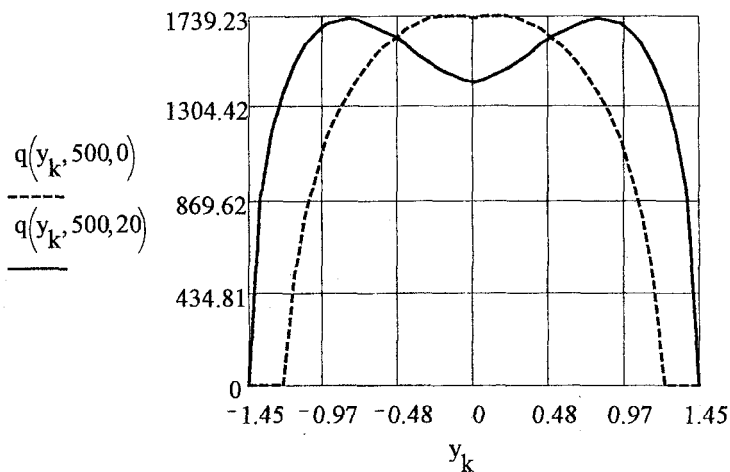


Рис 3.19. Эпюры контактных напряжений вдоль большой оси площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля (пунктирная линия) и дорожкой качения сложного профиля, полученной шлифованием наклонным кругом с $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия), при нагрузке $P = 500\text{H}$

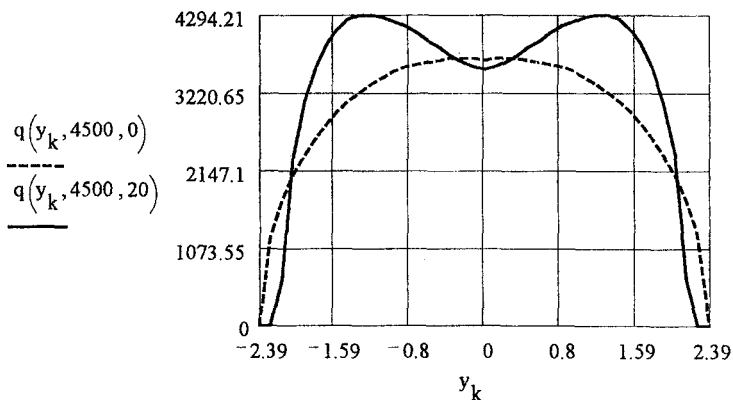


Рис. 3.20. Эпюры контактных напряжений вдоль большой оси площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля (пунктирная линия) и дорожкой качения сложного профиля, полученной шлифованием наклонным кругом с $\alpha = 20^\circ$ (сплошная линия), при нагрузке $P = 4500\text{H}$

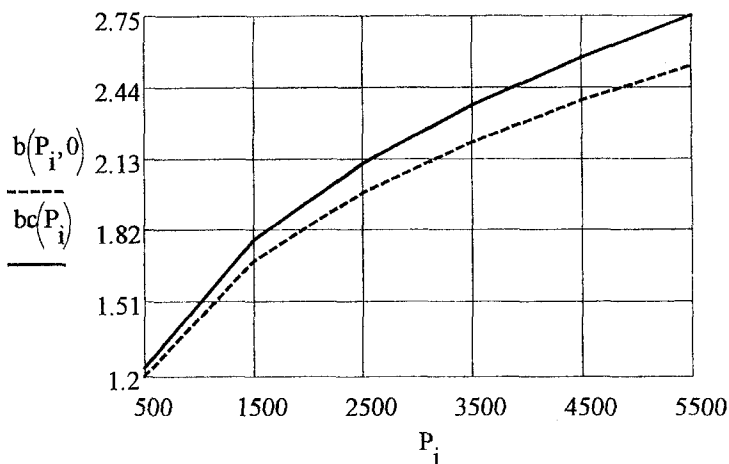
что стандартная методика основана на предположении о малости площадки контакта по сравнению с размерами самих контактирующих тел, так что, раскладывая зависимость, описывающую форму контактирующих тел, в ряд Тейлора, можно ограничиться только одним значащим членом второй степени. На самом деле даже при умеренных внешних нагрузках, которые свойственны стандартным подшипникам, форма начального зазора более точно описывается параболой, степень которой выше 2. Поэтому предлагаемая методика носит более универсальный характер и дает более точный результат.

Для расчета параметров контакта поверхностей сложной формы, при которых функция зазора между контактирующими поверхностями в главных сечениях отличается от параболы второй степени, общепринятая методика вообще не применима. Это и являлось причиной, ограничивающей оптимизацию геометрической формы контактирующих поверхностей во многих отраслях техники.

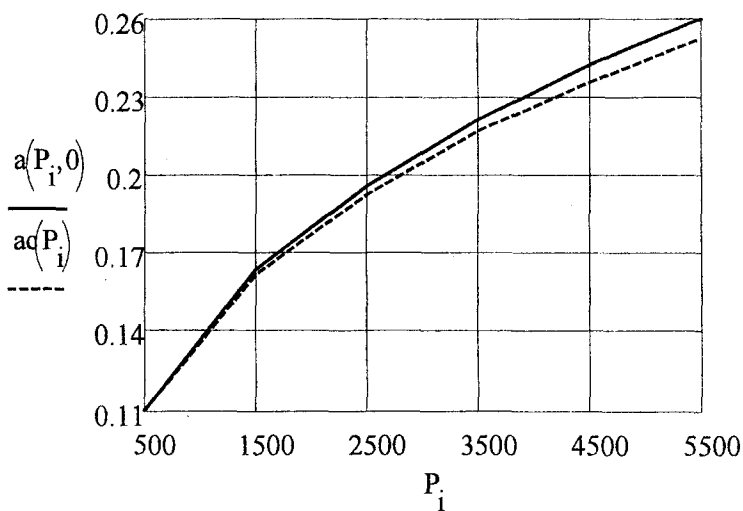
Шариковые подшипники со сложным профилем желоба могут воспринимать не только радиальные, но и комбинированные нагрузки. Причем у них имеются свои преимущества по сравнению с подшипниками со стандартным профилем. В частности, на рис. 3.26 показана зависимость начального зазора между шариком и желобом стандартного подшипника (пунктирная линия) и желоба, полученного шлифованием наклонным кругом под углом 20° (сплошная линия) от расстояния до дна желоба. В обоих случаях контакт шарика с боковой поверхностью профиля подшипника осуществляется под углом $\beta = 12^\circ$, как это обычно принято для радиальных подшипников. В этой точке контакта величина зазора равна нулю.

Как видно, функция зазора снизу и сверху от начальной точки контакта в обоих случаях различна. У стандартного подшипника зазоры в обоих направлениях от начальной точки контакта расположены симметрично. При контакте шарика с дорожкой качения сложного профиля величины зазоров ближе к дну желоба меньше, чем в стандартном подшипнике. Наоборот, при увеличении расстояния до начальной точки контакта в направлении от центра дорожки качения величина зазора между шариком и дорожкой качения получается значительно больше, чем в стандартном подшипнике. Это способствует снижению в подшипнике гироскопического эффекта, а, следовательно, снижению трения.

Гироскопический эффект появляется за счет разницы скоростей вдоль большой оси площадки контакта и заключается в верчении шарика вокруг оси, перпендикулярной поверхности контакта. Следовательно, при



a



б

Рис. 3.21. Зависимости размеров а- большой и б- малой полуосей площадок контакта шарика и дорожки качения стандартной конструкции от внешней нагрузки P (Н), полученные по стандартной методике bc и ac (мм) (пунктирные линии) и по предлагаемой методике b и a (мм) (сплошные линии)

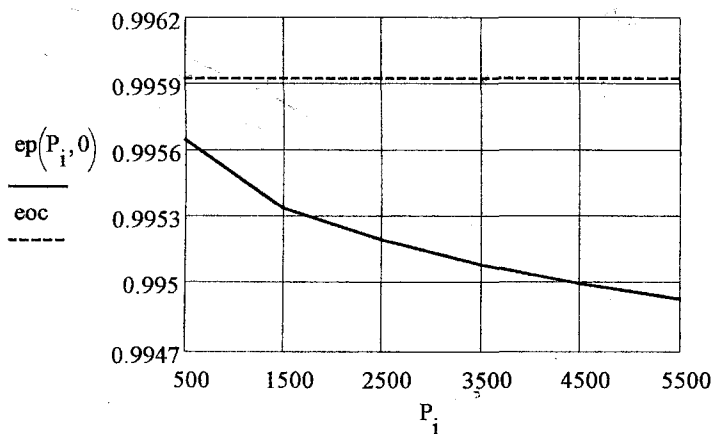


Рис. 3.22. Зависимости эксцентриситета площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля от внешней нагрузки P (Н), рассчитанные по стандартной методике $e_{ос}$ (пунктирная линия) и по предлагаемой методике e_p (сплошная линия)

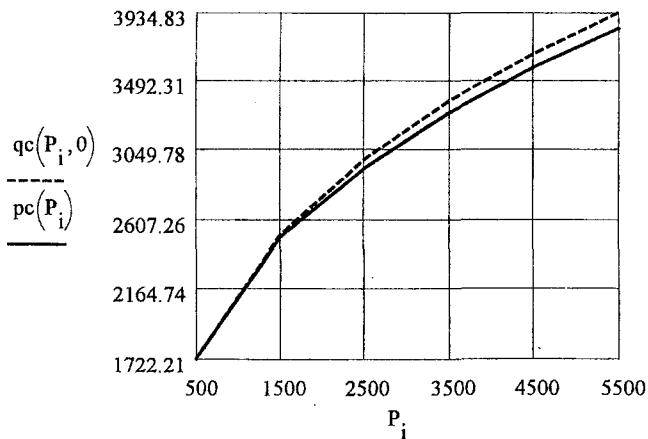


Рис. 3.23. Зависимости величины контактных напряжений в центре площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля от внешней нагрузки P (Н), рассчитанные по стандартной методике p_c (сплошная линия) и по предлагаемой методике q_c (пунктирная линия)

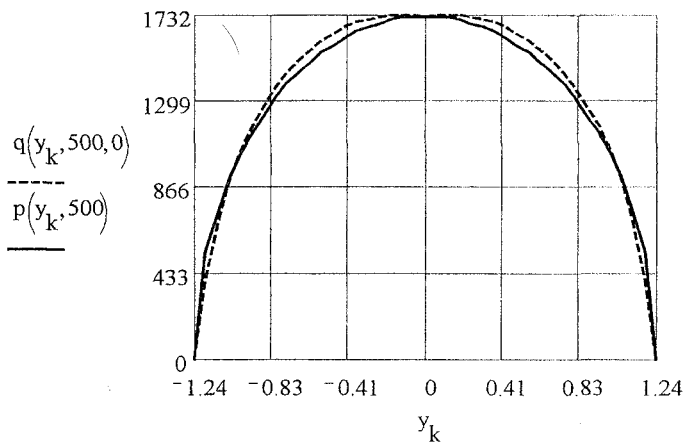


Рис.3.24. Эпюры контактных напряжений вдоль большой оси площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля, рассчитанные по стандартной методике p (МПа) (сплошная линия) и по предлагаемой методике q (МПа) (пунктирная линия) при нагрузке $P = 5000\text{H}$

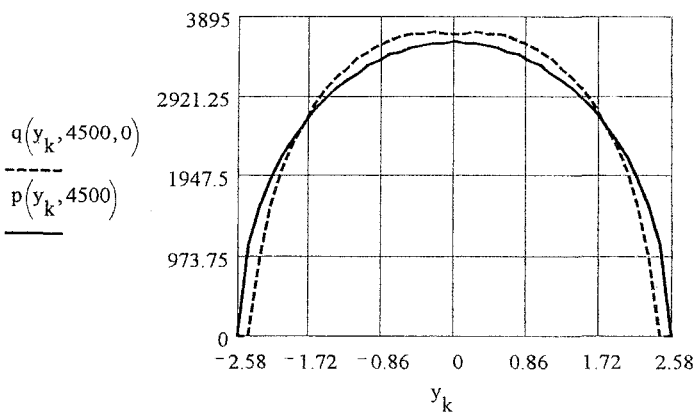


Рис.3.25. Эпюры контактных напряжений вдоль большой оси площадки контакта между шариком и дорожкой качения стандартного профиля, рассчитанные по стандартной методике p (МПа) (сплошная линия) и по предлагаемой методике q (МПа) (пунктирная линия) при нагрузке $P = 50000\text{H}$

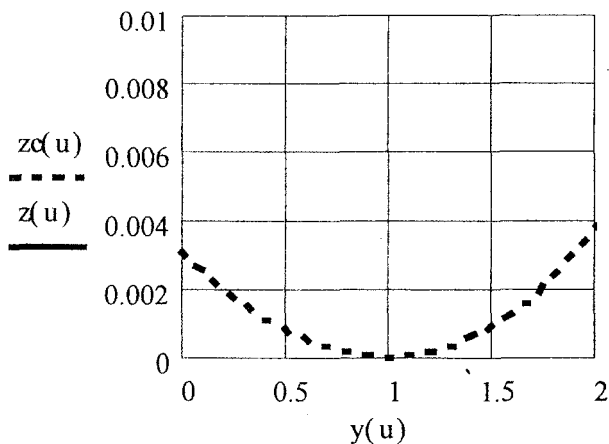


Рис. 3.26. Зависимость величины начального зазора (мм) между шариком и боковой поверхностью дорожки качения ($\beta = 12^\circ$) со стандартным желобом $z\alpha$ (пунктирная линия) и со сложным профилем z ($\alpha = 20^\circ$) (сплошная линия) от расстояния y (мм) до плоскости симметрии дорожки

смещении площадки контакта к дну желоба разница скоростей вдоль оси площадки контакта уменьшается, что обеспечивает снижение трения в подшипнике.

В стандартном подшипнике с круговым профилем при комбинированной нагрузке возникает симметричная площадка контакта, а следовательно, разница скоростей на площадке контакта получается высокая, что способствует повышению гироскопического эффекта.

Вторым преимуществом подшипников со сложным профилем желоба и работающих при наличии осевых нагрузок является то, что в этих подшипниках можно регулировать осевой зазор при заданном угле контакта без ущерба для несущей способности поверхности контакта. В качестве примера на рис. 3.27 показана зависимость величины осевого зазора от угла контакта в стандартном подшипнике (пунктирная линия) и в подшипнике со сложным профилем желоба (сплошная линия), полученного шлифованием кругом под углом $\alpha = 20^\circ$ при указанных выше условиях. Как видно, в подшипнике со сложным профилем желоба величина осевого зазора получается меньше, а это во многих случаях является важной характеристикой подшипника. С помощью операции шлифования наклонным кругом несложно изготавливать подшипники с трех- и четырехточечным контак-

том. Так как радиус кривизны сложного профиля вдоль линии профиля не является постоянным, то под каждый шарик можно подобрать профиль, получаемый шлифованием наклонным кругом с определенными параметрами, с которым шарик будет контактировать под заданным углом контакта в двух точках. Тем самым возможно обеспечить заданный угол контакта в подшипнике при отсутствии осевого зазора. Это невозможно обеспечить в стандартном подшипнике с гладким круговым профилем.

В качестве иллюстрации к этому на рис. 3.28 приведены зависимости величины радиального зазора между шариком и желобом, полученным шлифованием наклонным кругом под углом 20 градусов. Размер шарика под данный профиль подбирался так, чтобы он контактировал с дорожкой качения под заданным углом.

Как видно, используя предлагаемую конструкцию подшипника качения, можно обеспечить многоточечный контакт под любым необходимым углом. Это существенно упрощает изготовление подшипников с многоточечным контактом.

Так как двухточечный контакт шарика с желобом, имеющим гладкий круговой профиль, обеспечить невозможно, то при изготовлении подшипников с многоточечным контактом на практике приходится использовать сложную технологию фасонного шлифования и очень сложную доводку дорожки качения. Сложность шлифования заключается в том, что правку рабочей поверхности шлифовального круга необходимо осуществлять с двух сторон строго по одному и тому же радиусу и со смещением центра дуги профиля относительно плоскости симметрии круга на одну и ту же величину. Этого достигнуть сложно, и поэтому профиль желоба получается несимметричным.

При использовании предлагаемого способа технология изготовления подшипников упрощается в связи с тем, что в процессе правки рабочей поверхности шлифовального круга отпадает необходимость в смещении центра дуги окружности, по которой движется алмазный карандаш, относительно плоскости симметрии круга. Круг правится так же просто, как и при обработке обычных колец шарикоподшипников. Только радиус профиля круга изменяется в соответствии с расчетами по представленной ранее методике, а в процессе шлифования шлифовальный круг разворачивается на заданную величину. Но так как круг правится за один рабочий ход, то профиль шлифованной поверхности получается исключительно симметричным. Адекватность результатов теоретических исследований оценивалась путем сравнения расчетных значений большой полуоси площадки контакта шарика с дорожкой качения и значений, полученных экспериментальным путем. Результаты исследований представлены на рис. 3.29.

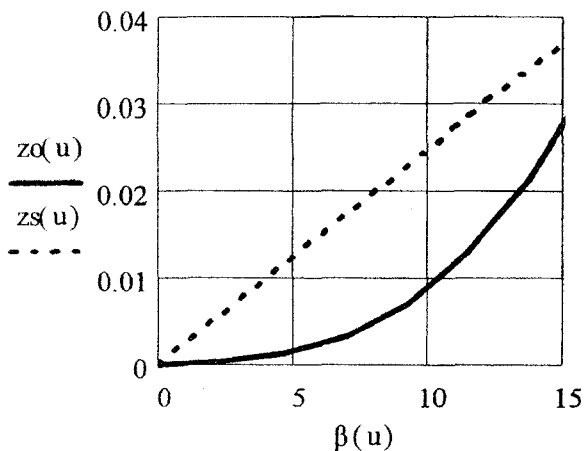


Рис. 3.27. Зависимость величины осевого зазора z_0 , мм между шариком ($d_s = 9,525$ мм) и желобом стандартного подшипника ($r_g = 4,905$ мм) (пунктирная линия) и желобом сложного профиля ($\alpha = 20^\circ$) (сплошная линия) от угла их контакта β , град.

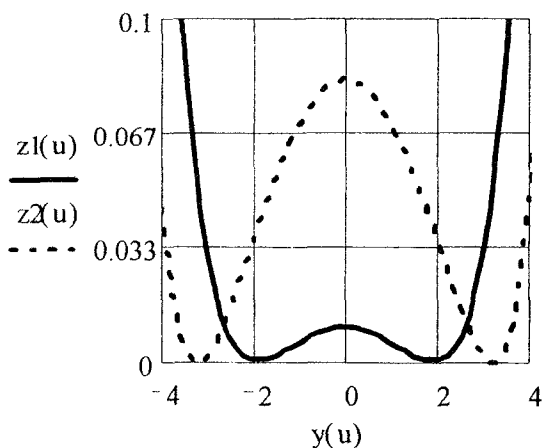
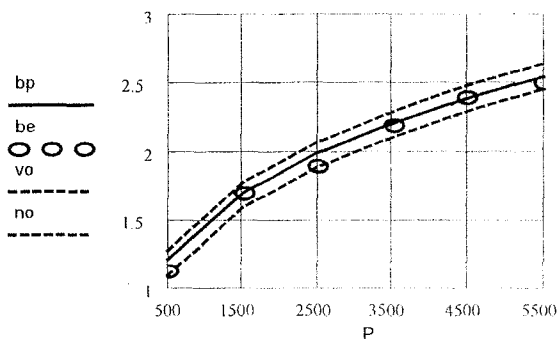
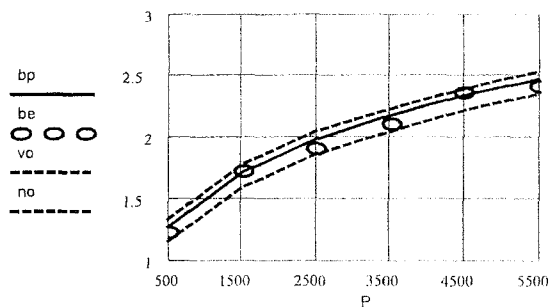


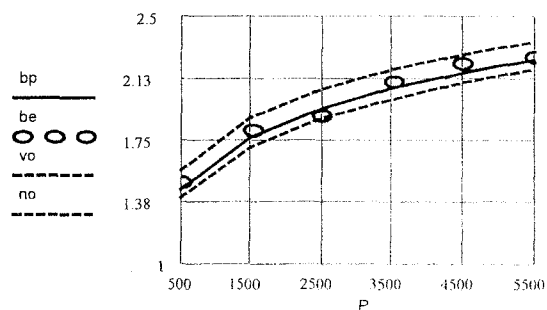
Рис. 3.28. Зависимость величины начального зазора между шариком и боковой поверхностью дорожки качения со сложным профилем ($\alpha = 20^\circ$) при их двухточечном контакте под углом $\beta = 24^\circ$, $d_s = 10$ мм (сплошная линия) и под углом $\beta = 36^\circ$, $d_s = 10,9$ мм (пунктирная линия)



а



б



в

Рис. 3.29. Теоретические b_r (мм) (сплошные линии) и экспериментальные значения b_e (мм) (точки) большой полуоси площадки контакта при различных значениях внешней нагрузки P (Н) и доверительные границы экспериментальных значений (пунктирные линии): а) $\alpha = 0^\circ$, б) $\alpha = 10^\circ$, в) $\alpha = 20^\circ$

Сплошными линиями на рисунке представлены теоретические зависимости, которые определялись по предлагаемой методике расчета параметров контакта тел сложной формы с использованием описанной ранее программы расчетов. Кружочками на графиках показаны замеренные в процессе экспериментальных исследований значения полуоси площадки контакта. Пунктирными линиями проведены границы доверительных интервалов экспериментальных значений.

Условия экспериментальных исследований соответствовали условиям расчета. Однако в силу действия случайных факторов некоторые геометрические параметры дорожек качения у разных колец не были одинаковыми. К числу таких параметров относятся радиус профиля дорожки качения и диаметр дорожки качения по дну желоба. Поэтому экспериментальные значения полуоси площадки контакта не совпадают с линией регрессии, а имеют относительно нее некоторый разброс.

Это и обеспечивает различие между расчетными и экспериментальными значениями полуосей площадок контакта. Однако, если расчетные значения находятся внутри доверительного интервала экспериментальных значений, то можно считать, что предложенная теория адекватно описывает результаты опыта.

Методика данных экспериментальных исследований представлена в следующем разделе. Доверительные интервалы подсчитывались при доверительной вероятности 0,95. Среднее квадратическое отклонение определялось по величине отклонений замеренных значений полуоси от соответствующих значений регрессионной зависимости, построенной по результатам опыта. Оценка адекватности математической модели осуществлялась путем определения доверительных границ экспериментальных данных. Если теоретические значения находились внутри доверительного интервала экспериментальных значений исследуемых параметров, то можно считать, что теоретические зависимости адекватно описывают результаты опытов. В противном случае результаты опыта не подтверждают математические модели, и, следовательно, эти математические модели подлежат уточнению. Как видно, расчетные значения большой полуоси площадки контакта находятся в пределах доверительных границ, что подтверждает адекватность математической модели результатам экспериментальных исследований.

3.4. Исследование эффективности процесса шлифования наклонным кругом

Экспериментальные исследования проводилась на базе отраслевой

научно-исследовательской лаборатории ОНИЛ ТАПС СГТУ. В качестве образцов использовались внутренние и наружные кольца шарикоподшипников № 206. Материалом образцов являлась сталь ШХ-15 (НРС 60..61), как наиболее распространенная в подшипникостроении.

Обработка осуществлялась на желобошлифовальном станке Л326-П1, налаженном на обработку желобов внутренних колец шарикоподшипников 206 наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом (рис.3.30). Автор воспользовался приспособлениями к станку, изготовленными С.Г.Бойченко [173].

Шлифование осуществлялась по методу врезания. Для этого на станке было установлено специальное правящее устройство. Заготовки базировались по отверстию на разжимной оправке и по торцу. Зажим колец осуществлялся по торцу. Для обеспечения заданного угла наклона круга к оси заготовки под шпиндельную бабку изделия станка подкладывался специальный клин, который имел нижние направляющие для установки на станке и верхние направляющие для установки на него бабки изделия.

Регулируемыми технологическими параметрами являлись угол наклона (α) оси шлифовального круга к оси заготовки, частота вращения заготовки (n_z , об/мин), величина поперечной подачи (S , мм/мин) и зернистость круга (Z , мкм). Определялась регрессионная зависимость от этих факторов шероховатости (R_a) шлифованной поверхности, ее волнистости (W) и отклонения от круглости (H), а также значения потребляемой мощности (N). Для построения регрессионных зависимостей был поставлен полный факторный эксперимент на двух уровнях типа 2^4 . Использовались интерполяционные модели на основе степенных функций, которые были представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} N &= C_N \cdot v_z^{a_N} \cdot S^{b_N} \cdot Z^{c_N} \cdot \alpha^{d_N}; \\ R_a &= C_R \cdot v_z^{a_R} \cdot S^{b_R} \cdot Z^{c_R} \cdot \alpha^{d_R}; \\ W &= C_W \cdot v_z^{a_W} \cdot S^{b_W} \cdot Z^{c_W} \cdot \alpha^{d_W}; \\ \Delta &= C_\Delta \cdot v_z^{a_\Delta} \cdot S^{b_\Delta} \cdot Z^{c_\Delta} \cdot \alpha^{d_\Delta}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где v_z - окружная скорость образца, м/мин;

S - поперечная подача шлифовального круга, мм/мин;

Z - номер зернистости инструмента (по ГОСТ 3647-59);

α - угол пересечения осей шлифовального круга и образца, град.;

N - потребляемая мощность при шлифовании, кВт.;

R_a - среднее арифметическое отклонение микропрофиля шлифованной поверхности, мкм;

W - волнистость шлифованной поверхности, $\mu\text{м}$;

Δ - отклонение от круглости, $\mu\text{м}$.

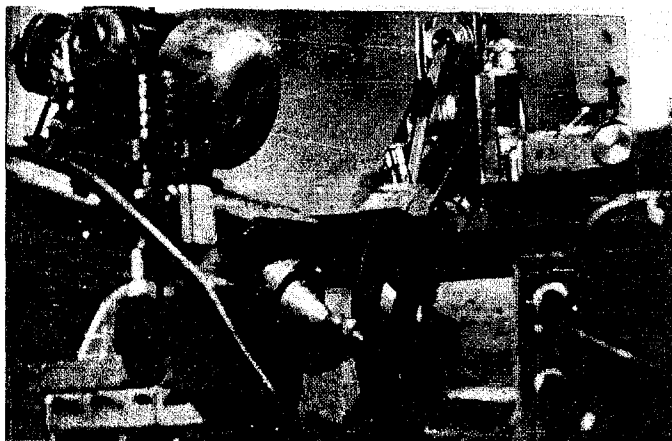


Рис. 3.30. Фотография желобошлифовального станка ЛЗ-26П, налаженного на обработку желобов колец шарикоподшипников наклонным кругом

Путем логарифмирования выражения (3.10) привели к линейному виду. По стандартной методике [75] осуществлялся поиск коэффициентов линейной регрессии. Затем определялась адекватность линейной модели. Однородность дисперсий оценивалась по критерию Кохрена, значимость коэффициентов регрессии определялась по критерию Стьюдента, адекватность математических моделей оценивалась по критерию Фишера. Во всех случаях уровень значимости принимался равным 5%.

На основе известных уравнений преобразования осуществлялся переход от кодированных значений факторов к их действительным значениям, которые использовались для построения графиков.

Параметры качества дорожки качения перед обработкой имели значения, указанные в табл. 3.1.

Условия проведения экспериментальных исследований представлены в табл. 3.2.

Кольца в соответствии с действующим технологическим процессом предварительно шлифовались по всем поверхностям, включая поверхность дорожки качения. Дорожка качения до эксперимента подвергалась предварительному шлифованию. Эксперименты осуществлялись в режиме чистового шлифования.

Таблица 3.1

Геометрические параметры дорожек качения колец подшипников перед шлифованием

Наименование параметров	Значения параметров
Волнистость поверхности, W_z , мкм	5-10
Отклонение от круглости, H , мкм	6-9
Шероховатость поверхности, R_z , мкм	1,0-1,7

Таблица 3.2

Условия проведения экспериментальных исследований

Наименование факторов процесса	Единицы измерения	Численные значения факторов
1. Абразивный инструмент ПП400 × 6 × 203		24А 8-16 СМ1 К5
2. Окружная скорость шлифовального круга	м/с.	35
3. Поперечная подача	мм/мин	0,02- 0,06
4. Окружная скорость образца	м/мин	20-80
5. α	градус	5° - 20°
6. Время обработки	с	25
7. Время выхаживания	с	5
8. Зернистость абразивного инструмента	мкм	8-25
9. Технологическая жидкость (ТЖ)		Вода (95%), НГЛ-205 (5%)
Правящий инструмент		Алмазный карандаш Ц-5
11. Осевая подача при правке	м/мин	0,55
12. Поперечная подача при правке	мм/дв. ход	0,005

Выбор указанных характеристик абразивного инструмента обусловлен их наибольшей применимостью при чистовом шлифовании, а также размерами образцов и характеристикой оборудования. Подвод технологической жидкости в рабочую зону осуществлялся поливом.

Правящий инструмент и режимы правки выбраны в соответствии с рекомендациями НИИ «Алмаз» [74].

Съем металла определяли на приборе Д-422 как разность диаметров желоба до и после обработки. Шероховатость поверхности определялась с помощью прибора. Измерения шероховатости поверхности проводились в пяти сечениях каждого кольца.

Волнистость и отклонение от круглости измерялись на приборе "Тэлиронд" фирмы "Taylor Hobson".

Исследование поверхности желобов на "ожог" проводилось методом травления в ванне с содержанием 0,035% раствора азотной кислоты в этиловом спирте в течение одной минуты с последующим осветлением. Поверхность считалась безожеговой, если на ней не было видимых следов углеродных превращений.

Контроль профиля шлифованной поверхности осуществлялся двумя способами: по координатам на оптическом микроскопе и путем вдавливания в окрашенную (закопченную) поверхность дорожки качения шарика с различной нагрузкой. При измерении первым способом определялись координаты профиля и сравнивались с заданными координатами.

При измерении вторым способом на оптическом микроскопе определялся размер пятна контакта шарика и дорожки качения при каждой из внешних нагрузок. После вдавливания под нагрузкой в поверхность дорожки качения шарика на поверхности дорожки остается отчетливый отпечаток пятна контакта (рис. 3.31). Результаты измерения сравнивались с расчетными значениями пятна контакта.

Длину дуги контакта шлифовального круга и заготовки определяли путем измерения на оптическом микроскопе по длине светового блика, располагающегося вдоль линии контакта. Световые блики хорошо видны как при направленном, так и при рассеянном свете (рис. 3.32).

Мощность, затраченную на шлифование при различных углах наклона шлифовального круга, измеряли при помощи ваттметра, включенного в фазу электродвигателя шлифовального шпинделя станка. Правящее устройство заимствовано от внутришлифовального станка фирмы "Mogaga" и доработано для установки на экспериментальное оборудование.

На основе исследований получены следующие регрессионные зависимости:

$$Ra = 3.33 \cdot v_z^{0.21} \cdot S^{0.36} \cdot Z^{-0.25} \cdot \alpha^{-0.51},$$

$$W = 0.69 \cdot v_z^{0.2} \cdot S^{0.22} \cdot Z^{0.23} \cdot \alpha^{-0.35},$$

$$\Delta = 1.34 \cdot v_z^{0.22} \cdot S^{0.2} \cdot Z^{0.27} \cdot \alpha^{-0.31},$$

$$N = 0.123 \cdot v_z^{0.43} \cdot S^{0.55} \cdot Z^{0.21} \cdot \alpha^{-0.29}.$$



Рис. 3.31. Фотография отпечатка пятна контакта на поверхности дорожки качения

Как видно из равенств (3.10), взаимовлияния факторов на показатели обработки в процессе шлифования не обнаружены. Очевидно, это вызвано небольшим диапазоном изменения значений влияющих факторов.

Указанные зависимости наглядно представлены на рис. 3.33-3.40. На рис. 3.33, 3.35, 3.37 и 3.39 сплошными линиями показаны значения показателей обработки при зернистости шлифовального круга, равной 8 (80 мкм), пунктирными линиями - при зернистости инструмента 16 (160 мкм), а штрихпунктирной линией - при зернистости 25 (250 мкм). На рис. 3.34, 3.36, 3.38 и 3.40 сплошными линиями показаны значения показателей обработки при окружной скорости заготовки, равной 20 м/мин, пунктирными линиями - при окружной скорости 40 м/мин., а штрихпунктирной линией - при окружной скорости заготовки 60 м/мин. Как видно из рис. 3.33, с возрастанием угла наклона оси шлифовального круга к оси заготовки шероховатость шлифованной поверхности существенно снижается. Объясняется это тем, что с возрастанием угла пересечения осей круга и заготовки увеличивается длина дуги их контакта. Следовательно, большее число абразивных зерен одновременно участвуют в резании. Естественно, что при неизменном объеме снимаемого припуска в единицу времени с увеличением числа режущих зерен толщина срезов уменьшается, снижается глубина ца-

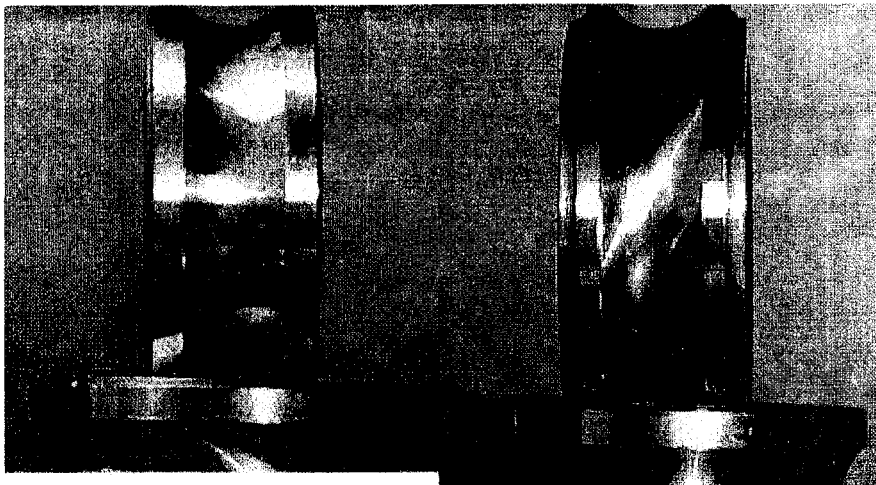


Рис.3.32. Световые блики на поверхности заготовки вдоль линии контакта со шлифовальным кругом, возникающей в процессе шлифования: слева- обычное шлифование, справа- шлифование наклонным кругом

рапин от зерен и шероховатость шлифованной поверхности. С возрастанием зернистости шлифовального круга шероховатость шлифованной поверхности уменьшается (рис. 3.33). Объяснить это можно на основе теории, изложенной в работах [81,82 и др.]. С возрастанием зернистости шлифовального круга увеличивается прочность удержания зерен в связке инструмента, а следовательно, менее значительно изменятся в процессе шлифования рельеф шлифовального круга, созданный в процессе правки.

В процессе шлифования крупнозернистым инструментом износ шлифовального круга преимущественно осуществляется за счет истирания вершин абразивных зерен. Вершины зерен притупляются, шероховатость поверхности снижается. Но при значительном износе вершин зерен появляется опасность возникновения в зоне шлифования высоких температур, приводящим к появлению дефектов на обрабатываемой поверхности.

При шлифовании мелкозернистым инструментом абразивные зерна шлифовального круга более склонны выпадать из связки инструмента под действием сил резания. В результате выпадения зерен из связки поверхностный слой шлифовального круга теряет свой первоначальный рельеф, плотность расположения режущих граней уменьшается, снижается температура в зоне шлифования, а шероховатость шлифованной поверхности возрастает. Однако серьезным недостатком мелкозернистого инструмента

является то, что он быстро теряет свои первоначальные формы и размеры, что уменьшает точность обработки.

Из рис. 3.34 видно, что увеличение поперечной подачи шлифовального круга и окружной скорости заготовки в процессе шлифования приводит к возрастанию шероховатости шлифованной поверхности. Объясняется это тем, что с возрастанием режима шлифования через поперечное сечение заготовки в единицу времени проходит меньшее число абразивных зерен, они срезают более толстые стружки, оставляют на поверхности заготовки более глубокие канавки, что и приводит к возрастанию шероховатости поверхности.

Примерно такое же влияние режим шлифования оказывает и на волнистость шлифованной поверхности. Как видно из рис. 3.35, с увеличением угла наклона оси шлифовального круга к заготовке волнистость шлифованной поверхности значительно снижается. Объясняется это тем, что увеличение угла пересечения осей круга и заготовки приводит к возрастанию площади их контакта и уменьшению толщин срезов. В свою очередь это приводит к повышению режущей способности шлифовального круга.

Повышение режущей способности инструмента приводит к меньшей технологической наследственности исходной формы заготовки, снижению уровня вибрации технологической системы и снижению волнистости шлифованной поверхности.

Из рис. 3.35 также видно, что с уменьшением зернистости инструмента волнистость шлифованной поверхности уменьшается. Объясняется это тем, что уменьшение зернистости приводит к повышению самозатачиваемости инструмента и повышению его режущей способности. Это, как было отмечено выше, способствует снижению волнистости.

Наоборот, как следует из рис. 3.36, возрастание поперечной подачи шлифовального круга и окружной скорости заготовки увеличивает волнистость шлифованной поверхности. Объясняется это тем, что увеличение режима процесса шлифования приводит к более высокой степени засаливания абразивного инструмента и снижению его режущей способности.

Снижение режущей способности инструмента обычно сопровождается повышенной вибрацией в технологической системе, что способствует повышению волнистости.

Кроме того, с возрастанием режима обработки увеличиваются силы резания и в технологической системе возбуждаются более интенсивные колебания, что также способствует возрастанию волнистости. Из рис. 3.37 видно, что с увеличением угла пересечения осей вращения шлифовального круга и заготовки и уменьшением зернистости инструмента отклонение от круглости шлифованной поверхности существенно снижается.

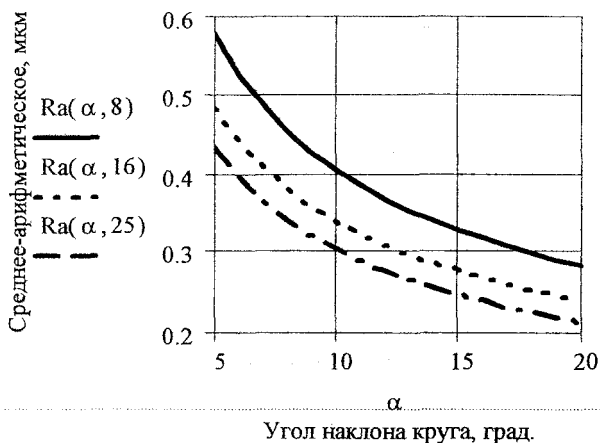


Рис. 3.33. Зависимость среднего арифметического отклонения микропрофиля R_a шлифованной поверхности от угла наклона α оси шлифовального круга к оси заготовки и от зернистости Z инструмента

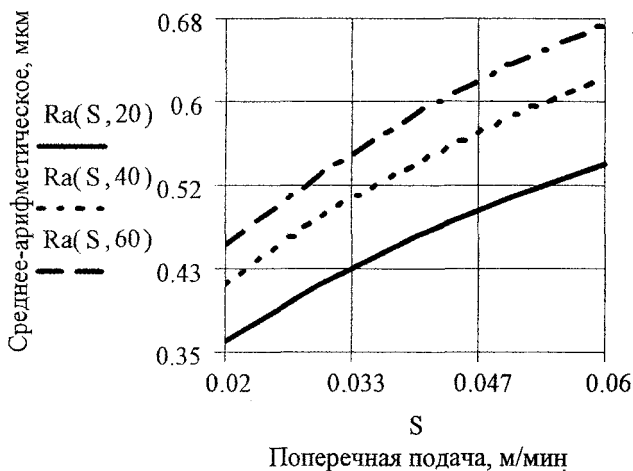


Рис. 3.34. Зависимость среднего арифметического отклонения микропрофиля R_a шлифованной поверхности от поперечной подачи S шлифовального круга и от окружной скорости v_Z инструмента

Объясняется это также повышением режущей способности шлифовального круга и снижением влияния степени технологического наследования шлифованной поверхностью исходных погрешностей формы заготовки. Точно такое же влияние, как и на волнистость, только в меньшей степени, оказывает действие режима обработки на отклонение от круглости шлифованной поверхности. Как видно из рис. 3.38, с возрастанием поперечной подачи шлифовального круга и окружной скорости заготовки величина отклонения от круглости возрастает. Очевидно, это вызвано снижением режущей способности шлифовального круга.

Важно отметить, что увеличение угла пересечения осей круга и заготовки оказывает положительное влияние не только на повышение качества шлифованной поверхности, но и на снижение удельной мощности шлифования. Из рис. 3.39 видно, что с увеличением угла пересечения осей заготовки и инструмента удельная мощность шлифования уменьшается. Объясняется это тем, что с возрастанием значений этого фактора существенно увеличивается длина дуги контакта заготовки и инструмента (рис.3.31), а мощность шлифования возрастает слабо. Это наглядно представлено на рис. 3.41 и 3.42. Как видно из рисунков, с увеличением угла скрещивания осей мощность шлифования возрастает менее значительно, чем длина дуги контакта заготовки и инструмента, что и обеспечивает снижение удельной мощности шлифования.

Из рис. 3.39 также видно, что с уменьшением зернистости инструмента мощность шлифования снижается. Это объясняется более высокой степенью самозатачивания мелкозернистого инструмента, а следовательно, более высокой его режущей способностью.

Из-за снижения режущей способности инструмента происходит увеличение удельной мощности шлифования при возрастании режима обработки. Это подтверждается графиками, изображенными на рис. 3.40, откуда следует, что чем выше поперечная подача инструмента и окружная скорость заготовки, тем больше удельная мощность шлифования.

Снижение удельной мощности влечет за собой уменьшение теплонапряженности процесса шлифования, а следовательно, повышение качества поверхностного слоя. Это положение иллюстрируется рис. 3.43, где показан процент заготовок, имеющих дефекты поверхностного слоя в виде ожоговых участков, после обычного шлифования и шлифования предложенным способом под углом 20 градусов к оси заготовки.

Как видно из рисунка, шлифование наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом обеспечивает существенное снижение доли колец с наличием ожога. Это обеспечивает либо увеличение качества обработки, либо при заданном качестве повышение производительности процесса шли-

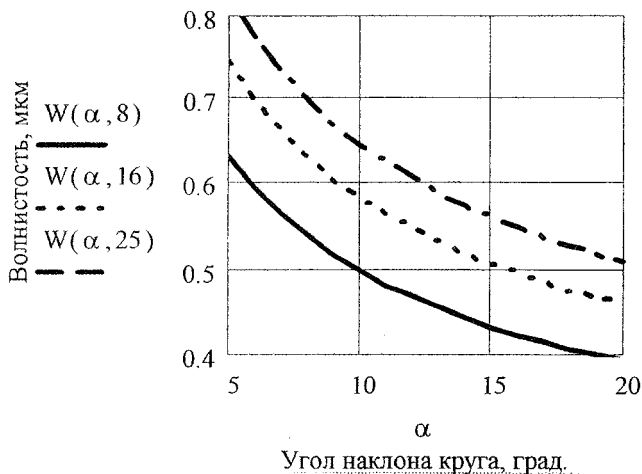


Рис. 3.35. Зависимость волнистости W шлифованной поверхности от угла наклона α оси шлифовального круга к оси заготовки и от зернистости Z инструмента

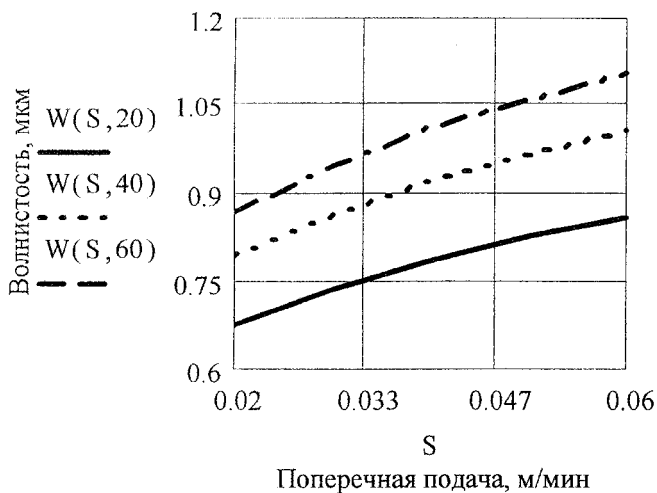


Рис. 3.36. Зависимость волнистости W шлифованной поверхности от поперечной подачи S шлифовального круга и от окружной скорости v_z инструмента

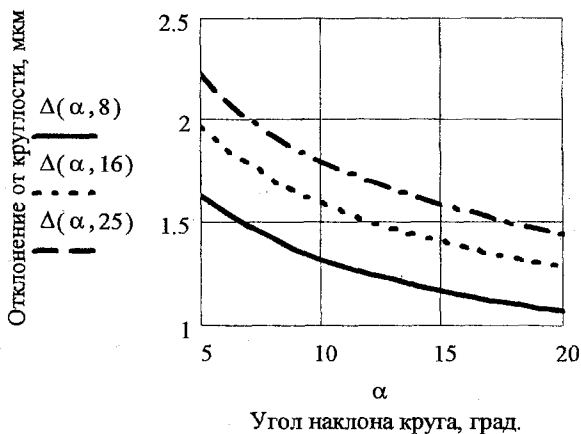


Рис. 3.37. Влияние угла наклона α оси шлифовального круга к оси заготовки и зернистости Z инструмента на отклонение от круглости Δ шлифованной поверхности

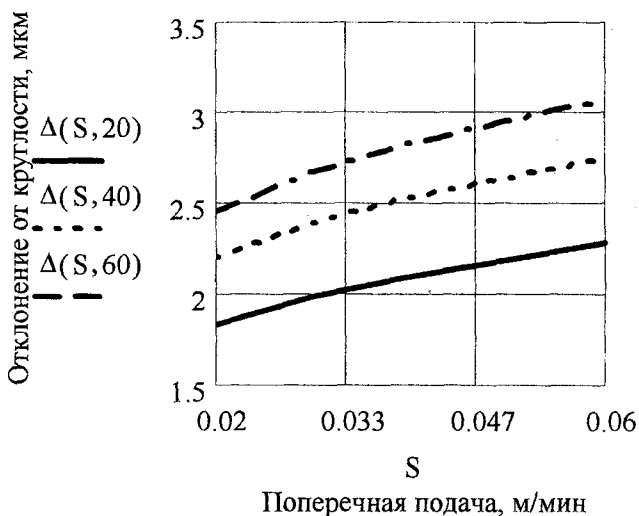


Рис. 3.38. Влияние поперечной подачи S шлифовального круга и окружной скорости vZ инструмента на отклонение от круглости Δ шлифованной поверхности

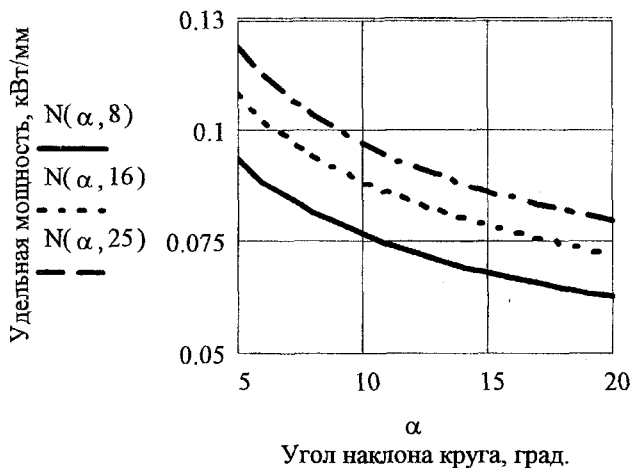


Рис. 3.39. Зависимость удельной мощности N шлифования от угла наклона α оси шлифовального круга к оси заготовки и от зернистости Z инструмента

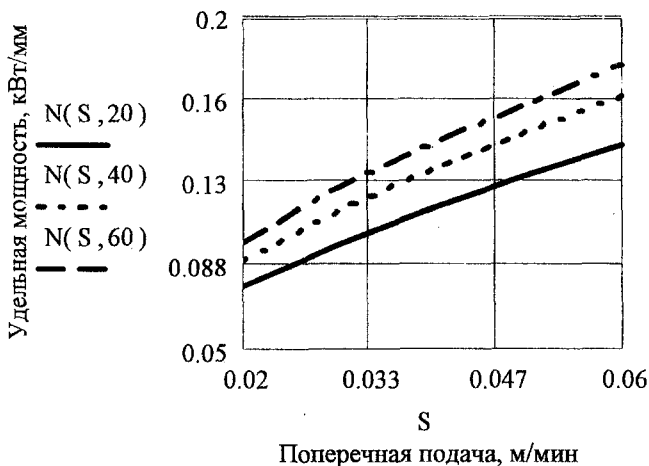


Рис. 3.40. Зависимость удельной мощности N шлифования от поперечной подачи S шлифовального круга и от окружной скорости v_z инструмента



Рис. 3.41. Зависимость мощности шлифования N от угла наклона круга:
 $S = 0,04$ м/мин; $v_z = 35$ м/мин; $Z = 12$

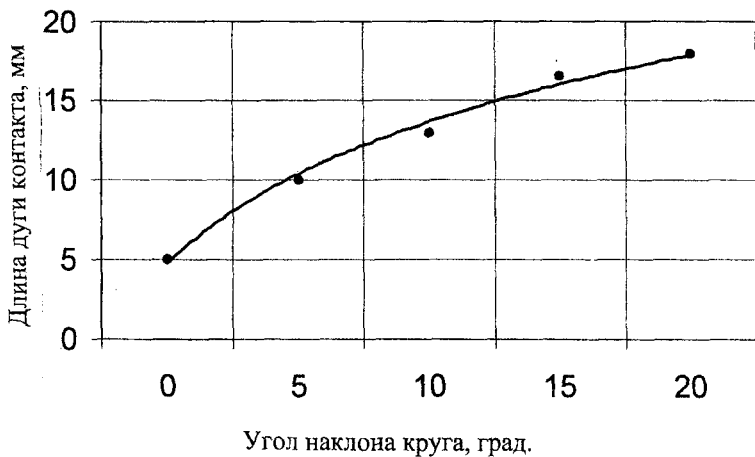


Рис. 3.42. Зависимость длины дуги контакта заготовки и инструмента от угла наклона оси круга к оси заготовки:
 $S = 0,04$ м/мин; $v_z = 35$ м/мин; $Z = 12$

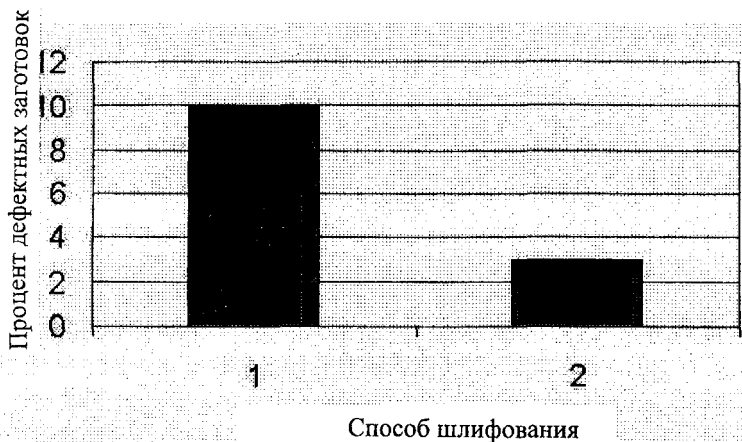


Рис. 3.43. Проценты дефектных заготовок при обычном шлифовании (1) и при шлифовании наклонным к оси заготовки кругом (2):
 круг 24A12CM2K6, $S=0,06$ мм/мин; $v_z=40$ м/мин

фования. Таким образом, выполненные исследования показали, что шлифование наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом приводит как к повышению качества шлифованной поверхности, так и к снижению удельной мощности шлифования, а следовательно, повышению производительности обработки. Это обеспечивает высокую эффективность данного способа шлифования.

Заключение

Выполненные исследования позволили разработать методику расчета параметров контакта упругих тел сложной формы и предложить технологию изготовления деталей типа колец подшипников с оптимизированными геометрическими параметрами рабочих поверхностей. Основными результатами исследования являются следующие:

1. Разработаны теоретические основы локального контакта упругих тел сложной геометрической формы, учитывающие непостоянство эксцентриситета эллипса контакта и различные формы профилей начального зазора в главных сечениях, описываемых параболическими зависимостями с произвольными показателями степени.

Предложенные зависимости устраняют недостаток существующей методики расчета контакта упругих тел, связанный с ограничением формы начального зазора между контактирующими телами в виде параболы второй степени. При показателе степени параболы, описывающей форму начального зазора, равном 2, результаты расчетов параметров упругого контакта тел по стандартной и предложенной методике полностью совпадают. Результаты расчетов по предложенной методике также хорошо согласуются с результатами аналогичных расчетов по другим методикам авторов, которые они выполнили для некоторых частных случаев. Но предложенная методика носит более универсальный характер и может получить более широкое практическое применение.

2. Выполнен анализ влияния геометрической формы упругих тел на параметры контакта реальных опор трения. Показано, что за счет изменения формы тел можно управлять формой эпюры контактных напряжений, а следовательно, в значительной степени и эксплуатационными свойствами поверхностей контакта.

При контакте тел сложной формы эксцентриситет эллипса площадки контакта с изменением величины внешней нагрузки не остается постоянным, как считается в общепринятой методике расчетов. Он изменяется: увеличивается при увеличении внешней нагрузки. Показано, что с увеличением эксцентриситета эллипса контакта возрастает жесткость контакта. Это обстоятельство может использоваться на практике с целью снижения податливости механизмов и машин при значительных нагрузках на соединения и опоры трения.

С увеличением показателя степени параболы, описывающей форму начального зазора между упруго контактирующими телами, жесткость их контакта также возрастает.

Большое влияние значение показателя степени формы начального за-

зора между телами оказывает на эпюру контактных напряжений. В соответствии со стандартной методикой контактные напряжения распределены по закону полуэллипсоида так, что в центре площадки контакта напряжения являются максимальными и в полтора раза превышают средние напряжения. При показателе зазора больше двух эпюра контактных напряжений вдоль главной оси носит двугорбый характер. Максимум контактных напряжений смещается к периферии площадки контакта, а в центре площадки контакта величина контактных напряжений снижается. Это обстоятельство является весьма важным для шариковых подшипников. Так как при работе шарикоподшипников в центре и по краям площадки контакта осуществляется наибольшее проскальзывание контактирующих поверхностей, то уменьшение контактных напряжений в центре площадки приводит к существенному увеличению долговечности подшипников и снижению момента трения в подшипнике.

С возрастанием значения показателя степени от 2 до 3 - 4 контактные напряжения распределяются более равномерно. Это обстоятельство имеет практическое значение для роликовых подшипников. С целью предотвращения краевого эффекта, который возникает при перекосах в роликоподшипниках, профиль их дорожки качения делают выпуклым в виде дуги окружности. Но при этом значительно возрастают контактные напряжения в центре площадки контакта. С использованием профиля дорожки качения роликоподшипника в виде параболы степени более 2 напряжения в центре площадки контакта снижаются, что способствует повышению долговечности подшипников и уменьшению их чувствительности к перекосам.

3. Показано, что предложенная методика расчета параметров контакта упругих тел может найти широкое применение не только при производстве подшипников качения, но и в других областях техники, например, при совершенствовании конструкции зубчатых, червячных передач, шлицевых и винтовых соединений, подшипников скольжения, множества других механизмов. А это в конечном счете приведет к существенному снижению затрат на трение, повышению быстроходности и долговечности различных машин, снижению затрат энергии.

4. Разработаны технологические основы изготовления деталей опор трения качения с рациональной геометрической формой на технологических операциях шлифования. Предложена технология шлифования шариковых опор качения наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом и основы обеспечения технологических параметров процесса шлифования при заданной рациональной геометрической форме шлифованных деталей.

5. Выполнены расчеты формы профиля заготовки, получаемой то-

роидальным шлифовальным кругом, ось которого скрещивается под острым углом с осью заготовки.

6. Разработаны алгоритм и программа расчета формы профиля заготовки, получаемой шлифованием наклонным кругом, а также параметров контакта получаемой дорожки качения с поверхностью шарика под действием внешней нагрузки.

7. Выполнен анализ влияния параметров настройки станка при шлифовании наклонным кругом на параметры контакта обработанной поверхности с поверхностью тел качения в шарикоподшипнике. Показано, что шлифование наклонным кругом обеспечивает получение более благоприятных параметров контакта тел и дорожек качения в шарикоподшипнике по сравнению с обычным шлифованием стандартных подшипников. Это способствует повышению работоспособности подшипников.

8. Выполнены исследования технологических возможностей процесса шлифования наклонным к оси заготовки шлифовальным кругом. Показано, что процесс шлифования наклонным кругом способствует повышению производительности обработки по сравнению с обычным шлифованием, а также повышению качества обработанной поверхности.

Библиографический список

1. Беляев Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел// Инженерные сооружения и строительная механика. - Л.: Путь, 1942.
2. Динник А.Н. Избранные труды. - Киев: АН УССР, 1952. Т.1.
3. Hertz H. Gesammelte Werke. - Leipzig, 1895. В1.
4. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. - М.: Факториал, 1998. - 288с.
5. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. - М.: Машиностроение, 1986. - 174с.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. - М.: Наука, 1986. - 334 с.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974.- 455с.
8. Амензаде Ю.А. Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1971.
9. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1953.- 264с.
10. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. -492 с.
11. Лурье А.И. Теория упругости.- М.: Наука, 1970.
12. Леонов М.Я. К теории расчета упругих оснований// Прикл. матем. и мех. 1939. Т3. Вып 2.
13. Леонов М.Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство// Прикл. матем. и мех. 1953. Т17. Вып. 1.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965.
15. Ляв А. Математическая теория упругости. -М.-Л.: ОНТИ НКГип СССР, 1935.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: АН СССР, 1954.
17. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979.
18. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.;Л.: Гостехиздат, 1949. -272с.
19. Королев А.В. Выбор оптимальной геометрической формы контактирующих поверхностей деталей машин и приборов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972.
20. Коровчинский М.В. Распределение напряжений в окрестности локального контакта упругих тел при одновременном действии нормальных и касательных усилий в контакте // Машиностроение. 1967. № 6. С.85-95.

21. Орлов А.В. Опоры качения с поверхностями сложной формы. - М.: Наука, 1983.
22. Орлов А.В. Оптимизация рабочих поверхностей опор качения. - М.: Наука, 1973.
23. Орлов В.А., Пинегин С.В. Саверский А.С., Матвеев В.М. Повышение долговечности шарикоподшипников// Вестн. Машиностроения. 1977. №12. С.16-18.
24. Пинегин С.В. Контактная прочность и сопротивление качению. - М.: Машиностроение, 1969.
25. Пинегин С.В., Шевелев И.А., Гудченко В.М. и др. Влияние внешних факторов на контактную прочность при качении. -М.: Наука, 1972.
26. Пинегин С.В., Орлов А.В. Сопротивление движению при некоторых видах свободного качения// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1976.
27. Пинегин С.В. Орлов А.В. Некоторые пути снижения потерь при обкатывании тел со сложными рабочими поверхностями// Машиностроение. 1970. № 1. С. 78-85.
28. Хотеева Р.Д. Некоторые технологические методы повышения долговечности подшипников качения// Машиностроение и приборостроение: Науч. сб. - Минск: Высшейшая школа, 1974. Вып.6.
29. Хэмрок Б. Дж., Андерсон У. Дж. Исследование шарикоподшипника с арочным наружным кольцом с учетом центробежных сил// Проблемы трения и смазки. 1973. №3. С.1-12.
30. Брозголь И.М. Влияние доводки рабочих поверхностей колец на уровень вибрации подшипников //Труды института/ ВНИПП. - М.,1962. №4. С 42-48.
31. Вениаминов К.Н., Василевский С.В. Влияние финишной операции на долговечность подшипников качения //Тр.ин-та /ВНИПП. - М., 1989. №1. С.3-6.
32. Елизаветин М.А., Сатель Э.А. Технологические способы повышения долговечности машин. -М.: Машиностроение, 1969. - 389 с.
33. Евсеев Д.Г. Формирование свойств поверхностных слоев при абразивной обработке. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. - 127с.
34. Колтунов И.Б. и др. Прогрессивные процессы абразивной, алмазной и эльборовоой обработки в подшипниковом производстве. - М.: Машиностроение, 1976. - 30 с.
35. Подшипники качения: Справочник-каталог /Под ред. В.Н.Нарышкина и Р.В.Коросташевского. - М.: Машиностроение, 1984. - 280с.
36. Рудзит Л.А. Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей. - Рига: Знание, 1975. - 176 с.

37. Рыжов Э.В., Суслов А.Г., Федоров В.П. Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. - М.: Машиностроение, 1979. С.82-96.

38. Kannel J.W. Comparison between predicted and measured asial pressure distribution between cylinders //Trans.ASK8. - 1974. - (Suly). - P.508.

39. Королев А.В. Расчет и конструирование подшипников качения: Учебное пособие. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1984. -63 с.

40. Кочетков А.М., Сандлер А.И. Прогрессивные процессы абразивной, алмазной и эльборовоой обработки в станкостроении. - М.: Машиностроение, 1976. - 31с.

41. Спришевский А.И. Подшипники качения. - М.: Машиностроение, 1969. - 631с.

42. Welterentwichelte DKFDDR Zylinderrollenlager in leistung gesteigerter Ausfuehrung ("E"-Lager)// Hansa. - 1985. - 122. - N5. - P.487-488.

43. Батенков С.В., Саверский А.С., Черепакова Г.С. Исследование напряженного состояния элементов цилиндрического роликоподшипника при перекосах колец методами фотоупругости и голографии //Тр.ин-та/ВНИИП. - М., 1981. - №4(110). С.87-94.

44. Бережинский В.М. Влияние перекоса колец бомбинированного конического роликоподшипника на характер контакта торца ролика с опорными бортами //Тр.ин-та/ ВНИИП. - М., 1981.-№2. С.28-30.

45. Виравов Р.В., Борисов В.Г. и др. К вопросу о перекосе роликов в направляющих качения / Изв. вузов. Машиностроение. - 1978. - №10. С.27-29

46. Галахов М.А., Фланман Я.Ш. Оптимальная форма бомбинированного ролика //Вестн. машиностроения. - 1986. - №7. - С.36-37.

47. Жевтунов В.П. Выбор и обоснование функции распределения долговечности подшипников качения //Тр.ин-та /ВНИИП. - М., 1966. - №1(45). - С.16-20.

48. Квасов В.И., Циханович А.Г. Влияние перекосов на долговечность цилиндрических роликоподшипников // Контактно-гидродинамическая теория смазки и ее практическое применение в технике: Сб. статей. -Куйбышев, 1972. - С.29-30.

49. Лейках Л.М. Перекос роликов в направляющих качения //Вестн. машиностроения. 1977. - №6. - С.27-30.

50. Папшев Д.Д. и др. Точность формы профиля поперечного сечения колец подшипников // Обработка высокопрочных сталей и сплавов инструментом из сверхтвердых синтетических материалов: Сб. статей - Куйбышев, 1980. - №2. - С.42-46.

51. Папшев Д.Д., Бударина Г.И. и др. Точность формы профиля поперечного сечения колец подшипников // Межвуз.сб.науч.тр. - Пенза, 1980. - № 9 - С. 26-29.

52. Спицин Н.А. Теоретические исследования в области определения оптимальной формы цилиндрических роликов //Тр.ин-та/ ВНИИП. - М., 1963. - №1(33). -С.12-14.
53. Demaid A.P.A., Mather I, Hollow-ended rolles reduce bearing wear //Des Eng. - 1972. - N11. - P.211-216.
54. А.с. 800450 (СССР), МНИ 16С 33/34. Ролик для подшипников качения /В.Э.Новиков// Бюл. изобр. 1981.№ 4.
55. А.с. 1141237 (СССР), МИМ 16С 19/06. Подшипник качения / А.В.Королев // Бюл. изобр. 1985. № 7.
56. Болкунов В.В., Дорофеев В.Ю. Новые конструкции подшипников способствуют техническому прогрессу и созданию конкурентноспособной машиностроительной продукции// Прогрессивные направления развития технологии машиностроения: Межвуз. научн. сб. - Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1993. - С.9-18.
57. Куликов С.И., Ризванов Ф.Ф. и др. Прогрессивные методы хонингования. - М.: Машиностроение, 1983. - 136 с.
58. Красненков В.И. О применении теории Герца к одной пространственной контактной задаче //Изд.вузов. Машиностроение. - 1956. №1. - С.16-25.
59. Опоры осей и валов машин и приборов /Н.А.Спицин, М.М. Машнев, Е.Н.Красковский и др. - М.;Л.: Машиностроение, 1970. - 520с.
60. Патент 12.48.411П ФРГ, МКИ 16С 19/52 33/34. Цилиндрический роликоподшипник //РЖ. Машиностроительные материалы, конструкции и расчет деталей машин. Гидропривод. -1984. №12.
61. Пинегин С.В., Орлов А.В., Табачников Ю.Б. Прецизионные опоры качения и опоры с газовой смазкой. - М.: Машиностроение, 1984. - С. 18.
62. Саверский А.С. и др. Влияние перекоса колец на работоспособность подшипников качения. Обзор. - М.: НИИАвтопром, 1976. - 55 с.
63. Спицин Н.А. и др. Высокоскоростные шарикоподшипники: Обзор. - М.: НИИ Автосельхозмаш, 1966. - 42с.
64. Филатова Р.М., Битюцкий Ю.И., Матюшин С.И. Новые методы расчета цилиндрических роликовых подшипников//Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам математической физики: Сб.статей - М.: Изд-во МФТИ. 1985. - С.137-143.
65. Чихирев А.Я., Давиденко О.Ю., Решетников М.К. Результаты экспериментальных исследований способа размерного суперфиниширования желобов колец шарикоподшипников. //Чистовые методы обработки: Межвуз. сб.-Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1984, - С. 18-21.

66. Яхин Б.А. Прогрессивные конструкции подшипников качения // Тр.ин-та/ ВНИПП. -М., 1981. №4. - С. 1-4.

67. Ящерицин П.И., Лившиц З.Б., Кошель В.М. Исследование функции распределения усталостных испытаний подшипников качения //Изв. вузов. Машиностроение. - 1970. - №4. - С.28-31.

68. Чихирев А.Я. Разработка и исследование способа суперфиниширования криволинейных поверхностей вращения с прямолинейной осевой осцилляцией инструментов: Дис.... канд. техн. наук: 05.02.08. - Саратов, 1983. 239с.

69. Бродский А.С. О форме шлифовального и ведущего круга при бесцентровом шлифовании выпуклой поверхности роликов с продольной подачей //Тр. ин-та/ ВНИПП. - М., 1985. №4(44). - С.78-92.

70. Выставка. "Станки ФРГ в Москве" / Сост.Н.Г.Эдельман //Подшипниковая промышленность: Научн.-техн. реф. сб. - М.: НИИАвтопром, 1981. Вып.3. - С. 32-42.

71. Комиссаров Н.И., Рахматуллин Р.Х. Технологический процесс обработки бомбонированных роликов //Экспресс - информация. Подшипниковая промышленность. -М.: НИИАвтопром, 1974.Вып. 11. - С.21-28.

72. Королев А.В. Исследование процессов образования поверхностей инструмента и детали при абразивной обработке. - Саратов: Изд-во Саратов.ун-та, 1975. - 191с.

73. Кузнецов И.П. Методы бесцентрового шлифования поверхностей тел вращения (деталей подшипников качения): Обзор /ВНИИЗ. - М., 1970. - 43 с.

74. Кулинич Л.П. Технологическое обеспечение точности формы и качества поверхности высокоточных деталей суперфинишированием: Автореф. дис.... канд. техн. наук: 05.02.08. - М., 1980. - 16 с.

75. Кремень З.И. и др. Суперфиниширование высокоточных деталей - М.: Машиностроение, 1974. - 114 с.

76. Митирев Т.Т. Расчет и технология изготовления выпуклых дорожек качения колец роликовых подшипников // Подшипник. - 1951. - С.9-11.

77. Гордеев А.В. Гибкий абразивный инструмент, применяемый в машиностроении: Обзорная информ. /Филиал ЦНИИ-ТЭИавтосельхозмаша.- Тольятти, 1990. - 58с.

78. Гришкевич А.В., Капуста В.А., Топоров О.А. Способ отделочной обработки стальных закаленных деталей // Вестник машиностроения. - 1973. №9 - С.55-57.

79. Еланова Т.О. Финишная обработка изделий алмазными шлифовальными инструментами:-М., ВНИИТЭМР, 1991. - 52с.

80. Наерман М.С. Прогрессивные процессы абразивной, алмазной и

эльборовской обработки в автомобилестроении. - М.: Машиностроение, 1976. - 235 с.

81. Королев А.В., Новоселов Ю.К. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. Часть 1. Состояние рабочей поверхности инструмента. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1987. - 160 с.

82. Королев А.В., Новоселов Ю.К. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. Часть 2. Взаимодействие инструмента и заготовки при абразивной обработке. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. - 160 с.

83. Королев А.В., Березняк Р.А. Прогрессивные процессы правки шлифовальных кругов. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1984. - 112 с.

84. Носов Н.В. Повышение эффективности и качества абразивных инструментов путем направленного регулирования их функциональных показателей: Дисс. ...докт. техн. наук: 05.02.08. - Самара, 1997. - 452 с.

85. Соколов В.О. Системные принципы обеспечения точности профильной алмазно-абразивной обработки. // Точность технологических и транспортных систем: Сб. статей. - Пенза: ПГУ, 1998. - С. 119-121.

86. Дорофеев В.Д. Основы профильной алмазно-абразивной обработки. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. - 186 с.

87. Ермаков Ю.М. Перспективы эффективного применения абразивной обработки: Обзор. - М.: НИИМаш, 1981. - 56 с.

88. Коновалов Е.Г. Основы новых способов металлообработки. - Минск: Изд-во АН БССР, 1961. - 297 с.

89. Гришкевич А.В., Цымбал И.П. Проектирование операций механической обработки. - Харьков: Вища школа, 1985. - 141 с.

90. Филин А.Н. Повышение точности профиля фасонных поверхностей при врезном шлифовании путем стабилизации радиального износа инструмента: Автореф. дис. ...докт. техн. наук. - М., 1987. - 33 с.

91. Кольчугин С.Ф. Повышение точности профильного врезного алмазного шлифования. // Процессы абразивной обработки, абразивные инструменты и материалы: Сб. трудов. - Волжский: ВИСИ, 1998. - С. 126-129.

92. Редько С.Г. Процессы теплообразования при шлифовании металлов. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1962. - 331 с.

93. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. - М.: Машиностроение, 1974. - 280 с.

94. Филимонов Л.Н. Высокоскоростное шлифование. - Л: Машиностроение, 1979. - 248 с.

95. Якимов А.В. Оптимизация процесса шлифования. - М.: Машиностроение, 1975. 176 с.

96. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1977.

97. Патент № 2000916 (РФ) Способ обработки фасонных поверхностей вращения / А.А. Королев А.А., А.В. Королев// Бюл. изобр. 1993. №37.

98. Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я. Подшипники качения. Справочник. - М.: Машиностроение, 1967 - 685 с.

99. Редько С.Г., Королев А.В., Бойченко С.Г. Влияние угла наклона шлифовального круга на качество шлифованной поверхности желобов колец шарикоподшипников// Пути повышения производительности, качества и эффективности процессов абразивной, алмазной и эльборово́й обработки в машиностроении: Сб. науч. статей. - М., 1976. -С. 56-57.

Введение.....	3
Глава 1. Контакт упругих тел сложной формы и его технологическое обеспечение	5
1.1. Системный анализ современного состояния и тенденций в области совершенствования геометрических параметров рабочих поверхностей опор качения.....	5
1.1.1. Современное состояние теории локального упругого контакта тел сложной формы и оптимизации геометрических параметров контакта.....	5
1.1.2. Основные направления совершенствования технологии шлифования рабочих поверхностей опор качения сложной формы.....	18
Глава 2. Механика упругого контакта тел сложной геометрической формы	24
2.1. Математическая модель упругого контакта тел сложной формы	24
2.2. Распределение контактных напряжений по поверхности контакта	43
2.3. Анализ влияния формы контактирующих тел на параметры их упругого контакта.....	54
Глава 3. Придание рациональной геометрической формы деталям на операциях шлифования.....	60
3.1. Формирование рациональной геометрии дорожек качения шарикоподшипников на операциях шлифования наклонным кругом.....	60
3.2. Алгоритм и программа расчетов рациональных параметров настройки процесса шлифования желобов колец шарикоподшипников наклонным кругом.....	68
3.3. Анализ влияния способа шлифования на параметры контакта дорожек и тел качения.....	82
3.4. Исследование эффективности процесса шлифования наклонным кругом.....	102
Заключение.....	117
Библиографический список.....	120

Научное издание

Королев Андрей Альбертович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УПРУГИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Редактор З.И. Шевченко

Лицензия ЛР № 020271 от 15.11.1996

Подписано в печать 15.05.01

Бум. тип.

Тираж 100 экз.

Усл. печ. л. 7,44(8)

Заказ 531

Формат 60x84 1/16

Уч.-изд. л. 7,5

С 114

Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77

Копипринтер СГТУ. 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77